Die Fibonacci-Zahlen und der Goldene Schnitt

Thomas Peters
Thomas’ Mathe-Seiten
www.mathe-seiten.de

31. August 2003

Dieser Artikel beginnt mit der Definition der Fibonacci-Zahlen und des Goldenen Schnitts. Diese beiden Begriffe ziehen sich dann wie ein roter Faden durch die folgenden Kapitel, um sich immer wieder auf wundersamste Art und Weise zu vemischen. Es werden explizite Formeln für die Fibonacci-Zahlen angegeben, die benutzt werden, um den Begriff der Fibonacci-Zahl zu erweitern. Außerdem werden die Potenzen des Goldenen Schnitts untersucht. Dann werden sowohl die Fibonacci-Zahlen als auch der Goldene Schnitt benutzt, um Stellenwertsysteme zu definieren. Zwischendurch finden sich immer wieder mahematische Kuriositäten wie die Kaninchen-Konstante, die Fibonacci-hyperbolischen Funktionen oder das 4-Zahlen-Spiel.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Was sind Fibonacci-Zahlen?

Betrachten wir einmal folgendes extrem einfaches Modell: Kaninchen bekommen jeden Monat, nachdem sie 2 Monate alt sind, Nachwuchs in Form von gegengeschlechtlichen Zwillingen. Sie sterben nie, und sie hören nie auf, sich fortzupflanzen. Dann ist die Anzahl der Kaninchenpaare nach n Monaten, beginnend mit einem Paar, die n-te Fibonacci-Zahl F_n.

n	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
F_n	1	1	2	3	5	8	13	$\cdots$

Wie man sieht, gehorcht diese Zahlenfolge der *Rekursionsgleichung*

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{mit } F_1 = F_2 = 1.$$

Mit diesem Wissen lässt sich jede beliebige Fibonacci-Zahl durch die Berechnung der vorangegangenen Fibonacci-Zahlen bestimmen.

Doch warum ist die Anzahl der Paare im n-ten Monat gleich der n-ten Fibonacci-Zahl? Hier ist der Beweis per vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: Im ersten Monat ist das erste Paar vorhanden (F_1), im zweiten Monat immer noch nur das erste (F_2).
Induktionsschritt: Im Monat $n + 1$ ist die Anzahl der Paare gleich der Anzahl der Paare, die schon im letzten Monat gelebt haben (F_n), plus die Neugeborenen. Da jedes Paar sich nach zwei Monaten fortpflanzt, ist die Anzahl der Neugeborenen gleich der Anzahl der Paare, die vor zwei Monaten lebten (F_{n-1}). $\square$

2 Eigenschaften der Fibonacci-Zahlen

Fibonacci-Zahlen treten bei allen erdenklichen Gelegenheiten in der Mathematik auf. Um nur eine zu nennen, sei erwähnt, dass die Summe der n-ten „schiefen“ Diagonalen im *Pascal'schen Dreieck* gleich der n-ten Fibonacci-Zahl ist.

Die Beziehungen der Fibonacci-Zahlen untereinander sind vielfältig. Hier ist eine kleine Formelsammlung:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} F_k &= F_{n+2} - 1 \\
\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} &= F_{2n} \\
\sum_{k=1}^{n} F_{2k} &= F_{2n+1} - 1 \\
\sum_{k=1}^{n} F_k^2 &= F_n F_{n+1} \\
F_{2n} &= F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 \\
F_{3n} &= F_{n+1}^3 + F_n^3 + F_{n-1}^3 \\
F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 &= (-1)^n \\
F_{n+1}^2 &= 4F_nF_{n-1} + F_{n-2}^2
\end{aligned}$$

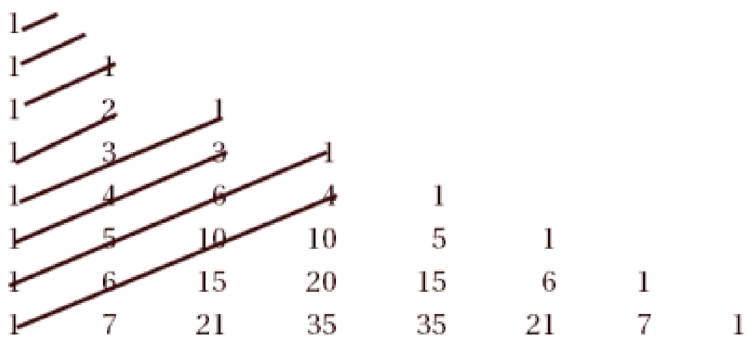

Abbildung 2.1: Die Fibonacci-Zahlen im Pascal'schen Dreieck.

3 Der Goldene Schnitt

Der Goldene Schnitt ist dasjenige Teilverhältnis, bei dem sich die Länge der ganzen Strecke zur längeren so verhält wie die längere zur kürzeren. Nennen wir die längere Seite a und die kürzere b, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&& \frac{a+b}{a} &= \frac{a}{b} \\
\Rightarrow && (a+b)\cdot b &= a^2 \\
\Rightarrow && a^2 - a\cdot b - b^2 &= 0 \\
\Rightarrow && a = b\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2} &\vee a = b\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

Da die Strecke a nur eine positive Länge haben kann, kommt nur die erste Lösung in Frage. Der Goldene Schnitt ist also $(1+\sqrt{5})/2$. Er ist damit Lösung der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$.

Der Goldene Schnitt ist irrational. Es war für die alten Griechen ein großer Schock, als sie dies erkannten, da sie der festen Überzeugung waren, jede Zahl sei als Bruch darstellbar. Die Irrationalität lässt sich allein anhand der Definition beweisen: Wäre der Goldene Schnitt rational, so müssten p, q existieren, so dass gilt

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 - \frac{p}{q} - 1 = 0,$$

wobei der Bruch p/q so weit wie möglich gekürzt sein soll. Daraus folgt

$$p\cdot(p-q) = q^2.$$

Diese Gleichung besagt, dass p die Zahl q^2 teilt. Da p und q teilerfremd sein sollten, muss $p = 1$ sein. Addiert man stattdessen $p\cdot q$ zu obiger Gleichung, so erhält man

$$p^2 = q\cdot(p+q),$$

was heißt, dass q die Zahl p teilt, also ist auch $q = 1$. Aber $p = q = 1$ ist keine Lösung für die quadratische Gleichung am Anfang, was zu einem Widerspruch führt. Also ist der Goldene Schnitt irrational!

4 Potenzen von φ

Der Goldene Schnitt φ ist also die positive Lösung der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$, oder anders gesagt $\varphi^2 = \varphi + 1$. Das heißt, um φ zu quadrieren, braucht man nur 1 zu φ zu addieren! Ähnliches gilt für φ^3:

$$\varphi^3 = \varphi \cdot \varphi^2 = \varphi \cdot (\varphi + 1) = \varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 1.$$

Und φ^4?

$$\varphi^4 = \varphi \cdot \varphi^3 = \varphi \cdot (2\varphi + 1) = 2\varphi^2 + \varphi = 2(\varphi + 1) + \varphi = 3\varphi + 2.$$

Betrachtet man die Differenzen der Potenzen, so erhält man $\varphi^2 - \varphi = 1$, $\varphi^3 - \varphi^2 = \varphi$ und $\varphi^4 - \varphi^3 = \varphi + 1 = \varphi^2$. Allgemein gilt

$$\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}.$$

Beweis per vollständiger Induktion:
Induktionsanfang: $\varphi^2 = \varphi + 1$ (w)
Induktionsschritt: $\varphi^{n+1} = (\varphi^n) \cdot \varphi = (\varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}) \cdot \varphi = \varphi^n + \varphi^{n-1}$. $\square$

5 Der Quotient sukzessiver Fibonacci-Zahlen

Nach der Rekursionsgleichung lässt sich der Quotient sukzessiver Fibonacci-Zahlen wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
& F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\
\Rightarrow \quad & \frac{F_n}{F_{n-1}} = 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{F_{n-1}}{F_{n-2}}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{F_{n-3}}{F_{n-2}}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{F_{n-2}}{F_{n-3}}}} \\
&= \dots \\
&= [1; 1, 1, 1, \dots, \frac{F_2}{F_1}] \\
&= \underbrace{[1; 1, 1, \dots, 1]}_{n-1}.
\end{aligned}$$

Das ist aber nicht anderes als ein Näherungswert für den Goldenen Schnitt, wie wir aus dem Artikel über Unendliche Potenzen wissen. Daraus folgt, dass der Quotient sukzessiver Fibonacci-Zahlen für $n \to \infty$ gegen den Goldenen Schnitt konvergiert!

Daher erhält man ebenfalls F_n aus F_{n-1}, indem man F_{n-1} mit φ multipliziert und das Ergebnis rundet, oder mathematisch formuliert

$$F_n = [\varphi F_{n-1} + 0{,}5],$$

wobei $[\,]$ die Gaußklammer ist. Doch φ braucht man nicht nur zur rekursiven, sondern auch zur expliziten Berechnung der Fibonacci-Zahlen!

6 Explizite Berechnung

Bis jetzt mussten wir zur Berechnung einer Fibonacci-Zahl alle vorhergehenden Zahlen berechnen. Das ist natürlich sehr unpraktisch. Jetzt werden wir uns überlegen, wie wir zu einer *expliziten Formel* kommen können.

Wir haben bereits gesehen, dass man (ungefähr) von einer Fibonacci-Zahl zur nächsten kommt, indem man den Vorgänger mit einem konstanten Faktor multipliziert. Das ist eine wichtige Eigenschaft der *Exponentialfunktionen*. Daher machen wir den Ansatz

$$f(n) = x^n.$$

Hierbei gilt es, das unbekannte x zu bestimmen. Aus der Rekursionsgleichung folgt

$$\begin{aligned} & x^n = x^{n-1} + x^{n-2} \quad \mid : x^{n-2} \\ \Rightarrow \quad & x^2 = x + 1 \\ \Rightarrow \quad & x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Wir erhalten zwei Lösungen, was für unsere Funktionsgleichung heißt

$$f(n) = a_1 x_1^n + a_2 x_2^n.$$

Setzen wir für n Werte ein, so sehen wir, dass wir die Fibonacci-Zahlen noch nicht ganz treffen, daher müssen zwei Korrekturfaktoren eingebaut werden, die es jetzt zu bestimmen gilt. Wir kennen aber zwei Bedingungen, so dass wir ein Gleichungssystem aufstellen können:

$$\begin{gathered} f(0) = a_1 + a_2 = 0 \\ f(1) = a_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + a_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \\ \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{gathered}$$

Damit erhalten wir als explizite Funktionsgleichung für die n-te Fibonacci-Zahl

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}.$$

Schon erstaunlich, dass für natürliche n immer ganze Zahlen herauskommen! Diese Formel heißt *Binets* oder *de Moivres Formel*.

Wird n immer größer, so wird der zweite Summand immer kleiner. Es reicht schon, den ersten Summanden zu berechnen und das Ergebnis zu runden. Damit erhalten wir eine weitere explizite Formel:

$$f(n) = \left[\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + 0{,}5 \right].$$

Es gibt übrigens auch eine Möglichkeit, eine Fibonacci-Zahl anhand nur eines Vorgängers zu berechnen, und zwar interessanter Weise ohne den Goldenen Schnitt! Die entsprechende Formel lautet

$$F_n = \left[\frac{F_{n-1} + 1 + \sqrt{5F_{n-1}^2}}{2} \right].$$

7 Ganze, reelle und komplexe Zahlen

Jetzt werden wir den Begriff der Fibonacci-Zahl etwas erweitern. Zunächst wenden wir uns den negativen ganzen Zahlen zu. Genauso, wie wir sagen können, eine Fibonacci-Zahl sei die Summe seiner Vorgänger, können wie behaupten, der Vorgänger sei die Differenz seiner Nachfolger. Wir erhalten dann die Rekursionsgleichung

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n.$$

Damit bekommen wir die Folge

n	$\cdots$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
F_n	$\cdots$	13	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	$\cdots$

.

Die Folgenglieder sind für $n < 0$ abwechselnd positiv (n ungerade) und negativ (n gerade). Die Werte stimmen mit denen der expliziten Funktionsgleichung überein. Lässt man die Vorzeichen außer Betracht, so ergibt sich die gleiche Folge wie im positiven Bereich.

Die Erweiterung auf reelle Zahlen ist mit einer Rekursionsgleichung nicht zu leisten. Wir können aber durchaus in der expliziten Gleichung für n reelle Werte einsetzen. Allerdings werden die Funktionswerte dann im Allgemeinen komplex. Interessante Diagramme erhält man, wenn man den Verlauf der Kurve in die komplexe Zahlenebene plottet, der sich ergibt, wenn man in die Formel von Binet die positiven reellen Zahlen einsetzt. Abbildung 7.1 zeigt einen Plot von $f(n)$ für $0 \leq n \leq 6$.

Man sieht, wie sich der Graph scheinbar spiralförmig um die reelle Achse windet, um sie an einigen Stellen zu schneiden (den Fibonacci-Zahlen!). Die Stelle $x = 1$ wird natürlich zweimal geschnitten. Der Ausschlag in Richtung imaginärer Achse wird zunehmend geringer.

Ein völlig anderes Bild ergibt sich für die negativen reellen Zahlen. Plottet man hier die Funktionswerte von -6 bis 0 in die Zahlenebene, so erhält man Abbildung 7.2.

Hier windet sich die Kurve spiralförmig um den Koordinatenursprung. Da die Beträge der negativen Fibonacci-Zahlen zunehmen, aber ständig das Vorzeichen wechseln, nimmt hier der Abstand zur reellen Achse zu.

Ebenfalls interessante Eindrücke erhält man, wenn man sich vom komplexen Funktionswert nur den Real- oder Imaginärteil anschaut. Die entsprechenden Plots sind in Abbildung 7.3 und 7.4 dargestellt.

Doch nicht nur reelle Werte lassen sich mit der Funktionsgleichung berechnen. Lässt man n sogar komplex werden, so erhalten wir eine komplexwertige Fibonacci-Funktion. Die Plots zeigen die Real- und Imaginärteile sowie die Beträge über der komplexen Zahlenebene.

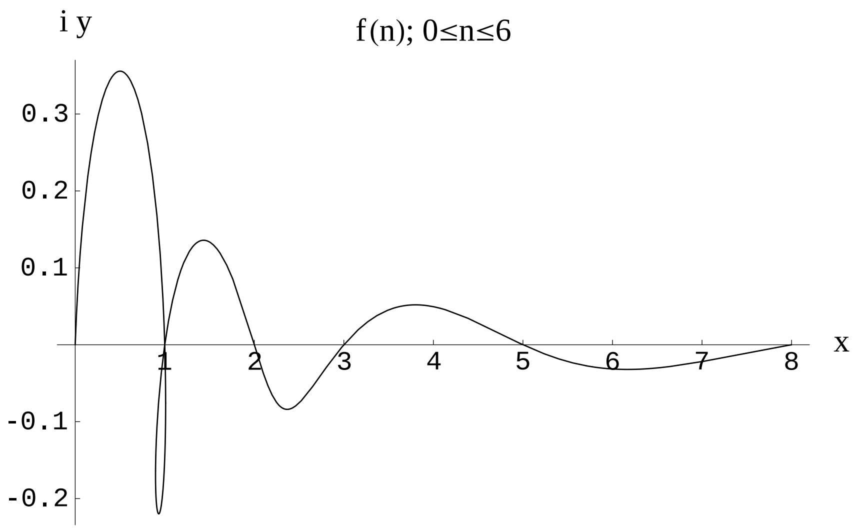

Abbildung 7.1: Argand-Diagramm für positive n.

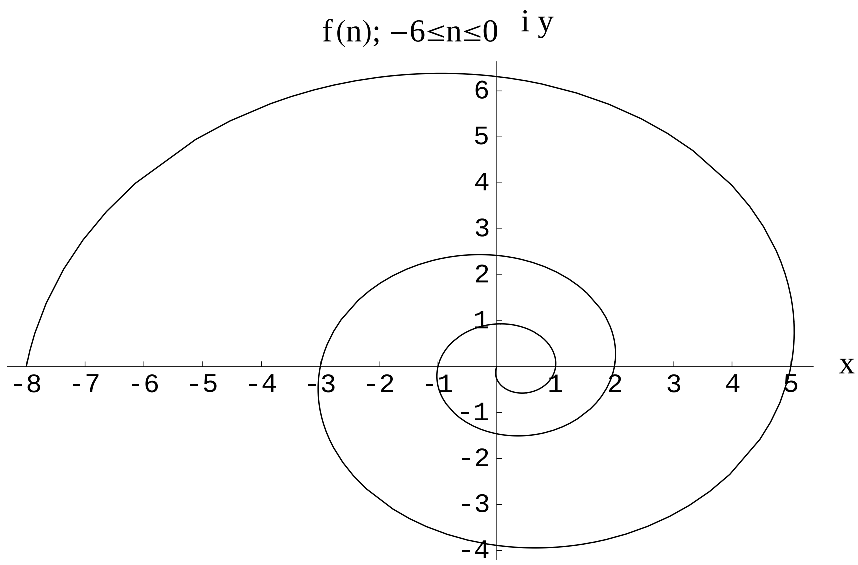

Abbildung 7.2: Argand-Diagramm für negative n.

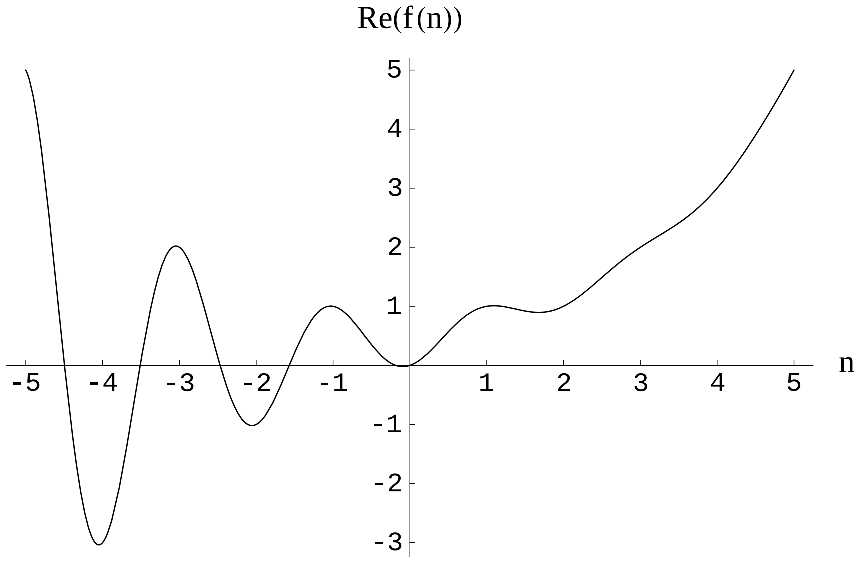

Abbildung 7.3: Realteil von Binets Formel.

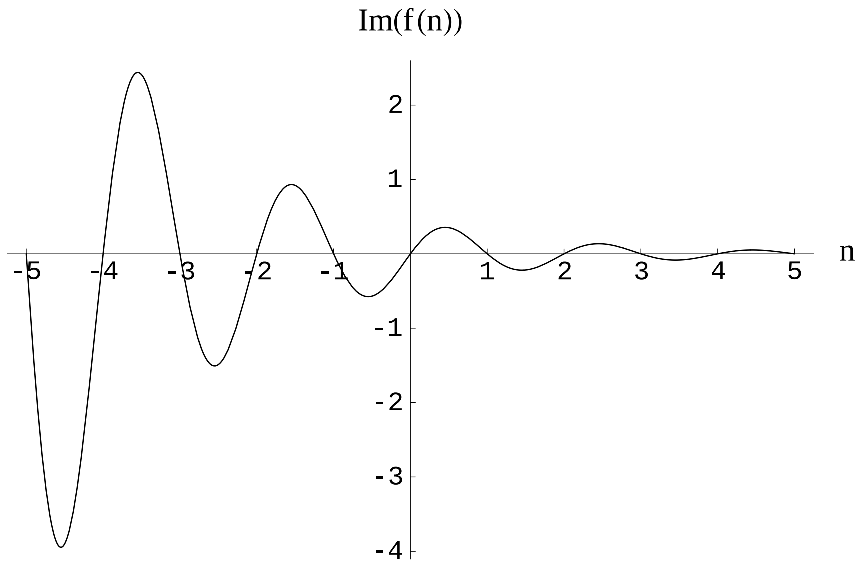

Abbildung 7.4: Imaginärteil von Binets Formel.

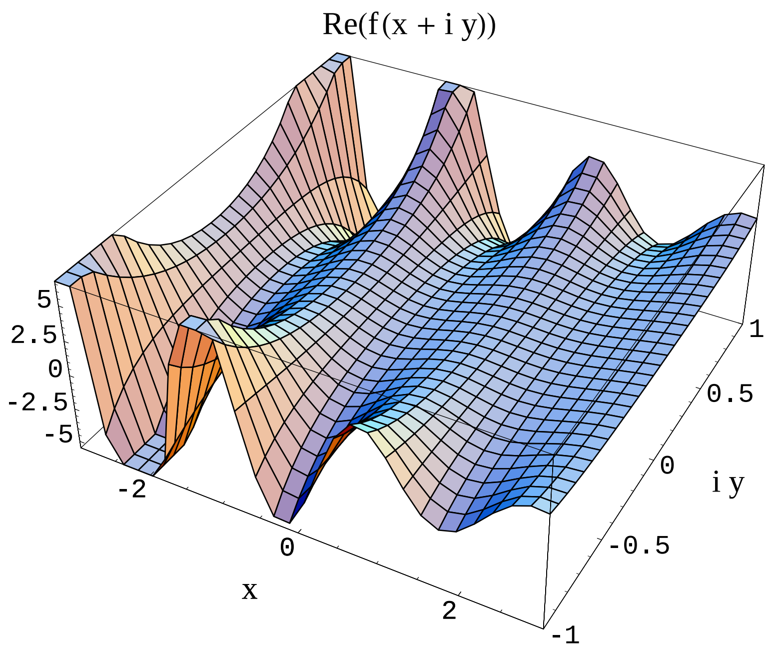

Abbildung 7.5: Realteil über der komplexen Zahlenebene.

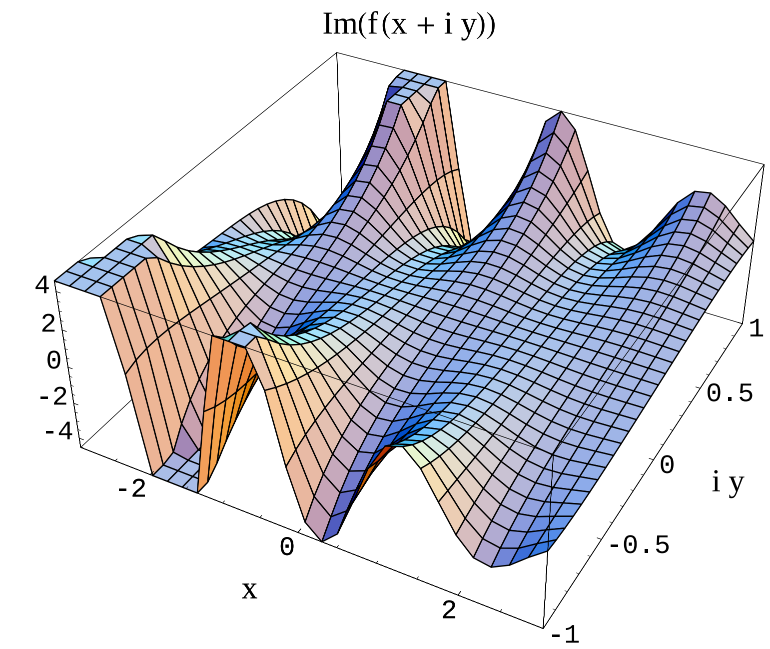

Abbildung 7.6: Imaginärteil über der komplexen Zahlenebene.

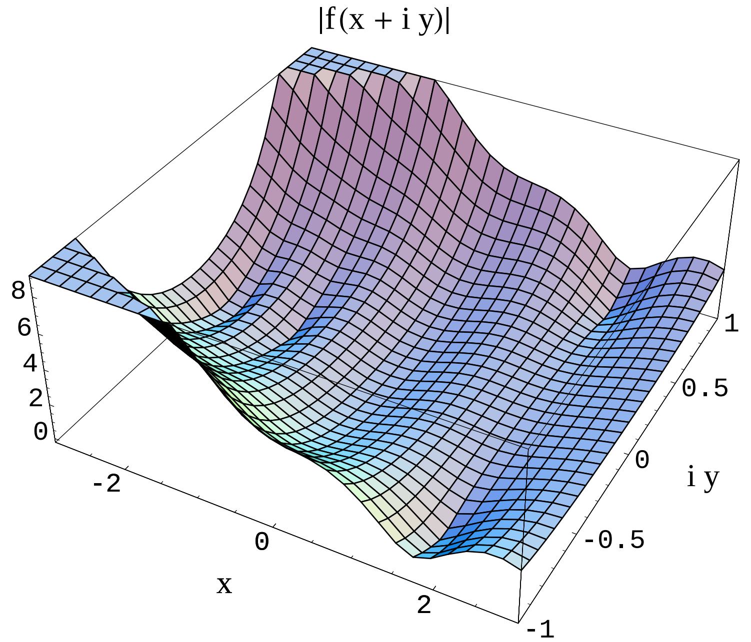

Abbildung 7.7: Betrag über der komplexen Zahlenebene.

8 Nochmal Potenzen von φ

Wir haben bereits folgende Wege gefunden, Potenzen von φ durch Vielfache von φ auszudrücken:

$$\begin{aligned}\varphi^2 &= 1 \cdot \varphi + 1\\ \varphi^3 &= 2 \cdot \varphi + 1\\ \varphi^4 &= 3 \cdot \varphi + 2.\end{aligned}$$

Betrachtet man die Entwicklung weiter, so findet man das Muster

$$\varphi^n = F_n \cdot \varphi + F_{n-1}.$$

Man erhält die Potenzen von φ also über die Fibonacci-Zahlen!

Beweis über vollständige Induktion:
Induktionsanfang: $\varphi^2 = F_2 \cdot \varphi + F_1$ (w)
Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}\varphi^{n+1} &= \varphi^n \cdot \varphi\\ &= (F_{n-1} + F_n \cdot \varphi) \cdot \varphi\\ &= F_{n-1} \cdot \varphi + F_n \cdot \varphi^2\\ &= F_{n-1} \cdot \varphi + F_n(\varphi + 1)\\ &= F_{n-1} \cdot \varphi + F_n \cdot \varphi + F_n\\ &= (F_{n-1} + F_n) \cdot \varphi + F_n\\ &= F_{n+1} \cdot \varphi + F_n. \qquad \square\end{aligned}$$

Diese Beziehung gilt übrigens nicht nur für positive Potenzen und positive Fibonacci-Zahlen, sondern auch für alle ganzzahligen (auch negative!) Potenzen und Fibonacci-Zahlen!

Zusammen mit obigen Untersuchungen zu den Potenzen von φ können wir nun folgendes Problem lösen: Wie müssen die beiden Anfangsglieder einer Rekursionsgleichung $X_{n+1} = X_n + X_{n-1}$ lauten, wenn der Quotient sukzessiver Folgenglieder konstant sein soll?
Die Antwort: $X_1 = 1$ und $X_2 = \varphi$. Dann ist nämlich:

$$\begin{aligned}X_3 &= 1 + \varphi = \varphi^2\\ X_4 &= 1 + 2\varphi = \varphi^3\\ X_5 &= 2 + 3\varphi = \varphi^4\end{aligned}$$

usw. Der Quotient sukzessiver Folgenglieder ist dann konstant und beträgt φ. Eine andere Lösung für dieses Problem existiert nicht.

Darüber hinaus kann man genau wie oben zeigen, dass auch für die negative Lösung von $x^2 - x - 1 = 0$ gilt:

$$x^n = x \cdot F_n + F_{n-1}.$$

Damit haben wir einen einfachen Weg gefunden, Binets Formel zu beweisen. Wir haben nämlich

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n &= F_n \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + F_{n-1} \qquad \text{und} \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n &= F_n \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} + F_{n-1}. \end{aligned}$$

Die Differenz beider Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n &= F_n \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ \Rightarrow \qquad F_n &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \\ \Rightarrow \qquad F_n &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \end{aligned} \qquad \square$$

9 Stellenwertsystem zur Basis φ

Mit unserem Wissen über die Bildung von Potenzen des Goldenen Schnitts φ ist es nun möglich, ein *Stellenwertsystem* zur Basis φ zu schaffen (manchmal als Phinär oder Phigital bezeichnet). Man kann für jede ganze Zahl passende a_k finden, so dass man sie folgendermaßen darstellen kann:

$$\cdots + a_4\varphi^4 + a_3\varphi^3 + a_2\varphi^2 + a_1\varphi^1 + a_0\varphi^0 + a_{-1}\varphi^{-1} + a_{-2}\varphi^{-2} + a_{-3}\varphi^{-3} + a_{-4}\varphi^{-4} + \cdots .$$

Dabei machen wir uns obige Untersuchungen zu nutze. Da die Gleichungen auch für negative n gelten, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\dots\\
\varphi^5 &= 3 + 5\varphi\\
\varphi^4 &= 2 + 3\varphi\\
\varphi^3 &= 1 + 2\varphi\\
\varphi^2 &= 1 + 1\varphi\\
\varphi^1 &= 0 + 1\varphi\\
\varphi^0 &= 1 + 0\varphi\\
\varphi^{-1} &= -1 + 1\varphi\\
\varphi^{-2} &= 2 - 1\varphi\\
\varphi^{-3} &= -3 + 2\varphi\\
\varphi^{-4} &= 5 - 3\varphi\\
\varphi^{-5} &= -8 + 5\varphi\\
&\dots
\end{aligned}$$

Der Trick besteht nun darin, diese Gleichungen so zu kombinieren, dass der zweite (irrationale) Summand wegfällt. Beispiele:

$$\begin{aligned}
&1_{10} = 0_\varphi, \text{ denn } \varphi^0 = 1\\
&2_{10} = 10.01_\varphi, \text{ denn } \varphi^1 + \varphi^{-2} = 2\\
&3_{10} = 100.01_\varphi, \text{ denn } \varphi^2 + \varphi^{-2} = 3\\
&4_{10} = 101.01_\varphi, \text{ denn } \varphi^2 + \varphi^0 + \varphi^{-2} = 4
\end{aligned}$$

Dieses Verfahren funktioniert für alle ganzen Zahlen. Wie man sieht, kommt man alleine mit den Ziffern 1 und 0 aus. Außerdem können nie zwei Einsen nebeneinander stehen, denn $\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$, also würde $\dots 011 \dots$ zu $\dots 100 \dots$.

Bemerkenswert ist, dass die Basis dieses Stellenwertsystems eine irrationale Zahl ist! Übrigens besteht eine große Ähnlichkeit zum Stellenwertsystem Fibonaccimal. Das Verfahren zur Addition ist identisch!

10 Die Kaninchen-Konstante

Kehren wir noch einmal zu unserem Anfangsproblem mit den Kaninchen zurück. Der Kaninchenbestand kann unterteilt werden in Junge (J) und Erwachsene (E). Dabei steht ein Buchstabe immer für ein Paar. Dann ist der Bestand der ersten Monate:

1. J
2. E
3. EJ
4. EJE
5. EJEEJ
6. EJEEJEJE

Man erhält den Bestand des Monats $n+1$, indem man im Monat n jedes J durch ein E ersetzt (da das Paar erwachsen wird) und jedes E durch EJ (da das Paar Junge kriegt aber nicht stirbt). Eine andere Möglichkeit ist, die Zeichen von Monat $n-1$ an Monat n anzuhängen[1]. Anders gesagt bilden die Zeichen jedes Monats den Anfang der Zeichenkette des folgenden Monats. Das heißt aber, dass es im Grenzfall eine eindeutige unendlich lange Zeichenkette gibt. Ersetzt man jedes E durch eine 1 und jedes J durch eine 0, so lautet sie

$$10110101101101011010110110101101\ldots$$

Diese Zeichenkette heißt *Kaninchen-Folge*.

Erstaunlich ist, dass man diese Folge auch wie folgt erhält: Man zeichnet die Gerade $y = \varphi x$ in ein Koordinatensystem. Jedesmal, wenn der Graph eine Parallele zur x-Achse mit ganzzahligem Abstand schneidet, notiert man eine 1. Schneidet sie eine Parallele zur y-Achse mit ganzzahligem Abstand, so notiert man eine 0. Das Ergebnis ist wieder die Kaninchen-Folge!

Fasst man nun die Nullen und Einsen als eine Zahl im Dualsystem auf, so erhält man die *Kaninchen-Konstante*

$$0{,}10110101101101011010110110101101\ldots_2 = 0{,}709803\ldots_{10}.$$

Interessant ist deren Kettenbruchentwicklung. Sie ist $[0; 2^0, 2^1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^5, \ldots]$, wobei die Exponenten die Fibonacci-Zahlen sind!

[1] zum Beweis siehe das Kapitel über Lindenmayer-Systeme im Artikel über Fraktale

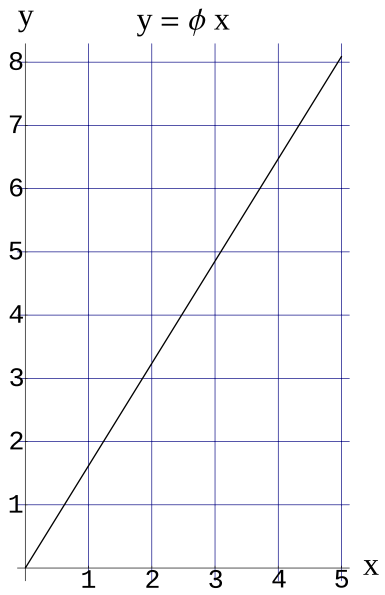

Abbildung 10.1: Zur Kaninchen-Konstante.

11 Ein merkwürdiger Bruch

Der Bruch $10/89$ ist eine besondere Zahl. Seine Dezimaldarstellung ist nicht abbrechend und lautet $0{,}11235955056179\ldots$ Dieser Bruch wird scheinbar auch durch die Addition

$$\begin{array}{l}
0{,}1 \\
+0{,}01 \\
+0{,}002 \\
+0{,}0003 \\
+0{,}00005 \\
+0{,}000008 \\
+0{,}0000013 \\
+0{,}00000021 \\
+0{,}000000034 \\
+0{,}0000000055 \\
+0{,}00000000089 \\
+\ldots \\
\hline
0{,}11235955056\ldots
\end{array}$$

erzeugt[1]. Diese Summe ist anders geschrieben

$$\begin{aligned}
&1 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^1 \\
&+1 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \\
&+2 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 \\
&+3 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4 \\
&+5 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^5 \\
&+8 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^6 \\
&+\dots
\end{aligned}$$

Es gilt also zu zeigen, dass

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k x^k$$

für $x = 1/10$ den Wert $10/89$ annimmt. Die Funktion lautet ausgeschrieben

$$f(x) = 1x^1 + 1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + \dots$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}
x \cdot f(x) &= 1x^2 + 1x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 5x^6 + 8x^7 + \dots \qquad \text{und} \\
x^2 \cdot f(x) &= 1x^3 + 1x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 5x^7 + 8x^8 + \dots
\end{aligned}$$

Durch Subtraktion findet man $f(x) - x \cdot f(x) - x^2 \cdot f(x) = x$. Daraus folgt

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Durch Einsetzen erhält man $f(1/10) = 10/89$. $\square$

[1] Die Ungenauigkeit gegen Ende liegt an den Überträgen.

12 Fibonacci-Polynome

Die *Fibonacci-Polynome* sind definiert als

$$F_{n+1}(x) = xF_n(x) + F_{n-1}(x)$$

mit $F_n(1) = F_n$, d.h. der Wert des n-ten Polynoms an der Stelle 1 ist gleich der n-ten Fibonacci-Zahl. Die ersten 5 Fibonacci-Polynome sind:

$$\begin{aligned}
F_1(x) =& 1 \\
F_2(x) =& x \\
F_3(x) =& x^2 + 1 \\
F_4(x) =& x^3 + 2x \\
F_5(x) =& x^4 + 3x^2 + 1.
\end{aligned}$$

Man kann die Fibonacci-Polynome nicht nur rekursiv berechnen. Das n-te Fibonacci-Polynom ergibt sich auch als Koeffizient von t^n der Potenzreihenentwicklung von $t/(1-xt-t^2)$ an der Stelle $t = 0$. Die lautet nämlich

$$t + xt^2 + (x^2+1)t^3 + (x^3+2x)t^4 + (x^4+3x^2+1)t^5 + \cdots .$$

13 Fibonaccimal

Fibonaccimal ist ein *Stellenwertsystem*. Der Name lehnt sich an die bekannten Stellenwertsysteme „dezimal“, „oktal“, „hexadezimal“ usw. an. Der wesentliche Unterschied ist jedoch, dass die Basis dieses Stellenwertsystems keine Konstante (10, 8, 16), sondern eben die Fibonacci-Zahlen sind!

Betrachten wir zunächst nur natürliche Zahlen, so kann jede Zahl dargestellt werden in der Form

$$\cdots + a_7 \cdot 21 + a_6 \cdot 13 + a_5 \cdot 8 + a_4 \cdot 5 + a_3 \cdot 3 + a_2 \cdot 2 + a_1 \cdot 1.$$

Es ist nun möglich, für jede natürliche Zahl eine Fibonaccimal-Darstellung zu finden, die nur aus Nullen und Einsen besteht. Eine wesentliche Eigenschaft dieser Darstellung ist, dass nie zwei Einsen aufeinander folgen können, da $\ldots 011 \ldots$ zu $\ldots 100$ werden würde. Hier sind die Zahlen 1 bis 20 in Fibonaccimal:

1	1
2	10
3	100
4	101
5	1000
6	1001
7	1010
8	10000
9	10001
10	10010
11	10100
12	10101
13	100000
14	100001
15	100010
16	100100
17	100101
18	101000
19	101001
20	101010

Selbstverständlich beginnen alle Fibonacci-Zahlen mit einer Eins und enden mit lauter Nullen. Außerdem benötigt die Darstellung immer dann eine weitere Stelle, wenn sie nur aus alternierenden Nullen und Einsen besteht.

Man kann Zahlen nicht nur in Fibonaccimal umwandeln, man kann auch mit ihnen in Fibonaccimal rechnen. Erstaunlich ist, dass in diesem Stellenwertsystem die Addition komplizierter ist als die Multiplikation! Daher hier erst einmal die Multiplikation:

Dazu bedient man sich der *Ägyptischen Multiplikation*. Man schreibt beide Faktoren nebeneinander und fängt nun an, den einen Faktor fortwährend zu halbieren und den anderen zu verdoppeln. Beim Halbieren werden Reste ignoriert. Ist man in der Halbierungsspalte bei 1 angekommen, wird aus allen Zeilen, in denen in der Halbierungsspalte eine ungerade Zahl steht, die Zahlen der Verdoppelungsspalte addiert. Das Ergebnis dieser Addition ist das gesuchte Produkt! Beispiel:

$$13 \cdot 25 = ?$$

halbieren	verdoppeln	ungerade?
13	25	ja
6	50	nein
3	100	ja
1	200	ja

$$\text{Summe } = 25 + 100 + 200 = 325$$

$$13 \cdot 25 = 325$$

Aber warum funktioniert dieses Verfahren? 13 ist im Dualsystem 1101_2. $13 \cdot 25$ ist also $1101_2 \cdot 25_{10}$ oder $(8+4+1) \cdot 25 = 8 \cdot 25 + 4 \cdot 25 + 25 = 200 + 100 + 25$, also der 1., 3. und 4. Wert.

Dieses Verfahren kann auf Fibonaccimal übertragen werden. Da die Zahlen aber schnell groß und unübersichtlich werden, sind sie hier trotzdem im Dezimalsystem dargestellt. Zur Multiplikation von 15 und 25 geht man folgendermaßen vor: Man wählt eine Zahl aus, z. B. 25. Dann bildet man wieder eine Tabelle. In der ersten Spalte steht eine Fibonacci-Zahl. In der zweiten Spalte steht die gewählte Zahl und dann ihre Verdopplung. Jede weitere Zeile ist die Summe der folgenden Zeilen. Das geht so lange, bis die Fibonacci-Zahl größer ist als die andere Zahl, also 15. Also:

$$15 \cdot 25 = ?$$

Fibonacci	addieren	Auswahl
1	25	nein
2	50	ja
3	75	nein
5	125	nein
8	200	nein
13	325	ja
21		

$$15 \cdot 25 = 50 + 325 = 375$$

Man wählt die Zeilen aus, in denen Fibonacci-Zahlen stehen, die in der Fibonaccimal-Darstellung von 15 enthalten sind. Die Summe der 2. Spalte ist wieder das gesuchte Produkt.

Nun kommen wir zur Addition. Hierbei sind, wie sich herausstellen wird, eine Menge von Transformationen nötig, damit die Summe eine gültige Fibonaccimal-Zahl bleibt. Ein Beispiel: $5 + 20 =?$

$$\begin{array}{rrl} & 1000 & \\ + & 101010 & \\ \hline & 102010 & (1) \\ & 101120 & (2) \\ & 110020 & (3) \\ & 1000020 & (4) \\ & 1000011:1 & (5) \\ & 1000100:1 & (6) \\ & 1000101 & (7) \end{array}$$

In diesem Beispiel kommen alle möglichen Umformungen vor. In Zeile (1) wurden einfach die Ziffern addiert. Dabei tritt die nicht erlaubte Ziffer $\ldots 2 \ldots$ auf, welche aber auch als $\ldots 111 \ldots$ geschrieben werden kann. In Zeile (2) taucht das gleiche Problem wieder auf. Außerdem stehen zwei Einsen $\ldots 11 \ldots$ nebeneinander, welche in $\ldots 100 \ldots$ transformiert werden. Durch das Verschieben nach rechts stehen in (3) erneut zwei Einsen nebeneinander, aber das erneute Verschieben löst das Problem. Die $\ldots 2 \ldots$ in (4) wird danach beseitigt, indem man die Fibonaccimal-Darstellung um die zweite Eins am Beginn der Fibonacci-Zahlen erweitert. Der Doppelpunkt soll signalisieren, dass es sich um keinen gewöhnlichen Dezimalpunkt handelt. In (6) werden die doppelten Einsen aus (5) wieder eliminiert. Schließlich wird die zusätzliche 1 wieder an die reguläre Stelle zurückgeschoben. (7) zeigt das Endergebnis.

Die Transformationen $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ und $2 \cdot F_n = F_{n+1} + F_{n-2}$ sind also wesentlich. Mit ihnen kann die Addition in Fibonaccimal problemlos durchgeführt werden.

14 Fibonacci-hyperbolische Funktionen

Binets Formel liefert für jedes n die n-te Fibonacci-Zahl. Beim Übergang zu reellen Zahlen kam jedoch das Problem auf, dass die Funktionswerte der Formel komplex wurden. Dieses Problem werden wir jetzt beheben. Dazu überlegen wir uns erst einmal eine Funktion, die zu jedem n die $(2n)$-te Fibonacci-Zahl liefert. Mit Hilfe der expliziten Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\varphi^{2n}-(-\varphi)^{-2n}}{\sqrt{5}} &= \frac{\varphi^{2n}-\varphi^{-2n}}{\sqrt{5}}\\ &= \frac{e^{2n\ln\varphi}-e^{-2n\ln\varphi}}{\sqrt{5}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}\sinh(2n\ln\varphi).\end{aligned}$$

Diese Funktion wird als *Fibonacci-hyperbolischer Sinus* Fibsinh bezeichnet. Natürlich gilt auch hier $\mathrm{Fibsinh}(-n) = -\mathrm{Fibsinh}(n)$. Diese Funktion liefert also für alle ganzen Zahlen n die $(2n)$-te Fibonacci-Zahl. Darüber hinaus ergibt sich der Vorteil, dass diese Funktion auch für reelle n nur reelle Werte zurückgibt.

Um alle ganzen Fibonacci-Zahlen zu erhalten, benötigen wir eine weitere Funktion, die zu jedem n die $(2n+1)$-te Fibonacci-Zahl liefert. Es ergibt sich der *Fibonacci-hyperbolische Cosinus* Fibcosh

$$\begin{aligned}\frac{\varphi^{2n+1}-(-\varphi)^{-(2n+1)}}{\sqrt{5}} &= \frac{\varphi^{2n+1}+\varphi^{-(2n+1)}}{\sqrt{5}}\\ &= \frac{e^{(2n+1)\ln\varphi}+e^{-(2n+1)\ln\varphi}}{\sqrt{5}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}\cosh((2n+1)\ln\varphi).\end{aligned}$$

Naheliegenderweise gilt hier $\mathrm{Fibcosh}(-x) = \mathrm{Fibcosh}(x-1)$.

Man kann nun, da wir ja reelle Zahlen betrachten wollen, diese Funktionen zusammen mit dem Realteil des Wertes von Binets Formel in ein Diagramm plotten. Dazu muss man natürlich, um sinnvolle Diagramme zu erhalten, $\mathrm{Fibsinh}(n/2)$ und $\mathrm{Fibcosh}((n-1)/2)$ verwenden. Dann liefern beide Funktionen abwechselnd den richtigen Wert. Man erkennt schön, wie sich die Fibonacci-Kurve an beide Funktionen anschmiegt.

Die obere Schranke bildet $\mathrm{Fibcosh}((n-1)/2)$, der die Fibonacci-Kurve für ungerade n berührt. Untere Schranke ist $\mathrm{Fibsinh}(n/2)$, der sie bei geraden n berührt.

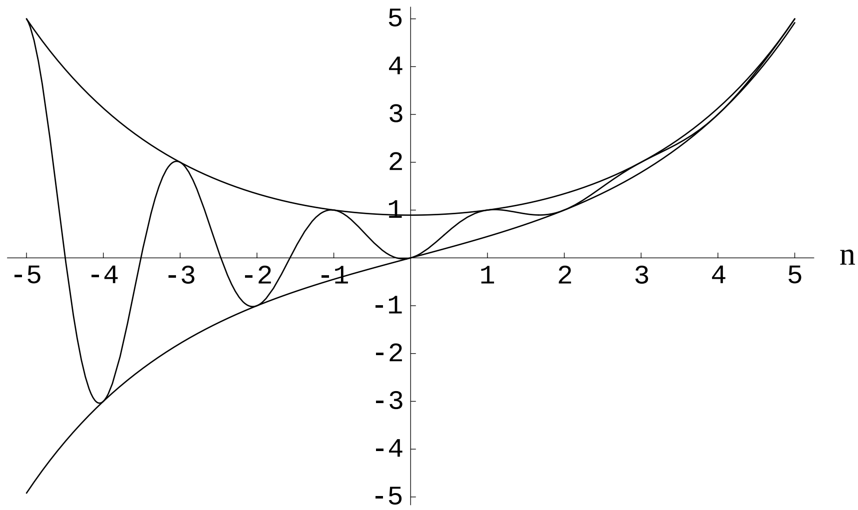

Abbildung 14.1: Die Fibonacci-hyperbolischen Funktionen.

15 Ein Zusammenhang von φ und π

Die mathematischen Konstanten φ und π sind grundlegend für die Geometrie. Es ist also naheliegend, nach einem Zusammenhang dieser beiden Zahlen zu suchen.

Wie beginnen unsere Überlegungen mit der Frage, für welche $x \in]0;\pi/2]$ $\sin x$ ein geschlossener (endlicher) algebraischer Ausdruck ist. Die trivialen Fälle an den Rändern sind $\sin 0 = 0$ und $\sin \pi/2 = 1$. Aus der Betrachtung der (halben) Innenwinkel eines gleichseitigen Dreiecks findet man noch $\sin \pi/6 = 0.5$ sowie $\sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$. Die halben Innenwinkel eines Quadrats liefern $\sin \pi/4 = 1/\sqrt{2}$. Diese Werte kann man auf die gemeinsame Form

$$\sin \frac{\pi}{t} = \frac{\sqrt{a}}{2}$$

bringen.

t	6	4	3	2
a	1	2	3	4

Doch sind das schon alle möglichen Ausdrücke?

Bevor wir dieser Frage auf den Grund gehen, werden wir noch unsere Formelsammlung etwas erweitern. Für den Cosinus gilt

$$\cos \frac{\pi}{t} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{t}} = \sqrt{1 - \frac{a}{4}} = \frac{\sqrt{4-a}}{2}.$$

Will man also das Argument des Sinus in das Argument des Cosinus transformieren, muss man nur $4 - a$ bilden.

Außerdem haben wir

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

also kann man die Berechnung des Sinus des *Komplementwinkels* auf den Cosinus und damit auf die Transformation $a \mapsto 4 - a$ zurückführen.

Ferner haben wir das Additionstheorem $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, was auf

$$\cos 2x = \left(\frac{\sqrt{4-a}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^2 = \frac{2-a}{2} = \frac{\sqrt{4-4a+a^2}}{2}$$

führt. Durch Transformation finden wir

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{4-(4-4a+a^2)}}{2} = \frac{\sqrt{4a-a^2}}{2}.$$

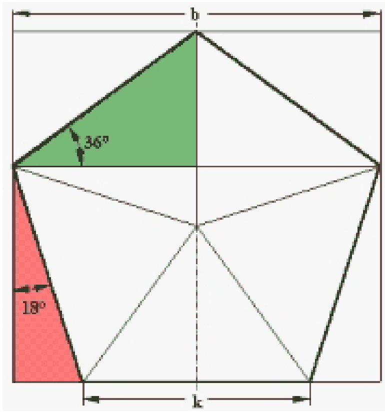

Abbildung 15.1: Fünfeck.

Wir werden nun einen Zusammenhang zwischen φ und π mit Hilfe der Winkelbetrachtung eines regelmäßigen Fünfecks herstellen.

Der *Zentriwinkel* beträgt $360°/5 = 72°$. Damit ist der *Basiswinkel* der fünf Dreiecke $(180° - 72°)/2 = 54°$. Demnach erhebt sich die linke obere Kante des Pentagons mit $180° - 90° - 54° = 36°$ über der Horizontalen (grünes Dreieck). Also:

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{b}{2k} \iff b = 2k\cos\frac{\pi}{5}$$

Die linke untere Kante des Pentagons erhebt sich mit dem doppelten Basiswinkel $2 \cdot 54° = 108°$ über der Horizontalen. Ergänzt zu $180°$ ist der untere Winkel des roten Dreicks $180° - 108° = 72°$. Dann errechnen sich für den oberen spitzen Winkel des roten Dreiecks $180° - 90° - 72° = 18°$ oder

$$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{b-k}{2k} \iff b = k \cdot \left(1 + 2\sin\frac{\pi}{10}\right).$$

Durch Gleichsetzen findet man

$$2k\cos\frac{\pi}{5} = k \cdot \left(1 + 2\sin\frac{\pi}{10}\right) \iff 2\cos\frac{\pi}{5} = 1 + 2\sin\frac{\pi}{10}.$$

Mit dem Additionstheorem für doppelte Winkel folgt weiter

$$\begin{aligned} 2\left(\cos^2\frac{\pi}{10} - \sin^2\frac{\pi}{10}\right) &= 1 + 2\sin\frac{\pi}{10} \\ \iff 2\left(1 - \sin^2\frac{\pi}{10} - \sin^2\frac{\pi}{10}\right) &= 1 + 2\sin\frac{\pi}{10} \\ \iff \qquad 1 - 4\sin^2\frac{\pi}{10} &= 2\sin\frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

Jetzt substituieren wir $u = 2\sin\pi/10$ und erhalten

$$u^2 + u - 1 = 0 \iff u = -0.5 \pm \sqrt{1.25}.$$

Da $2\sin\pi/10 > 0$ erhalten wir $u = -0.5 + \sqrt{1.25}$:

$$2\sin\frac{\pi}{10} = -0.5 + \sqrt{1.25} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi - 1$$

$$\iff \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\varphi-1}{2} = \frac{\sqrt{(\varphi-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{\varphi^2-2\varphi+1}}{2} = \frac{\sqrt{\varphi+1-2\varphi+1}}{2} = \frac{\sqrt{2-\varphi}}{2}.$$

Dies ist ein weiteres Ergebnis nach unserem Muster.

Hieraus lassen sich noch drei weitere Ausdrücke finden. Mit der Formel für doppelte Winkel ergibt sich

$$\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{4(2-\varphi)-(2-\varphi)^2}}{2} = \frac{\sqrt{3-\varphi}}{2},$$

und die Komplementwinkel hierzu sind

$$\sin 2\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{4-(2-\varphi)}}{2} = \frac{\sqrt{2+\varphi}}{2}$$

und

$$\sin 3\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{4-(3-\varphi)}}{2} = \frac{\sqrt{1+\varphi}}{2}.$$

Zu unserer ursprünglichen Tabelle können wir also noch

t	10	5	$10/3$	$5/2$
a	$2-\varphi$	$3-\varphi$	$1+\varphi$	$2+\varphi$

hinzufügen. Damit ist ein Zusammenhang zwischen φ und π hergestellt.

16 Die Goldene Spirale

Wir hatten ursprünglich den Goldenen Schnitt als ein gewisses Teilverhältnis von Strecken eingeführt. Man kann statt dieser eindimensionalen Definition auch eine zweidimensionale Definition verwenden. Diese lautet: Der Goldene Schnitt ist dasjenige Verhältnis der längeren Seite zur kürzeren eines Rechtecks, bei dem man nach Entfernen eines Quadrats über der kürzeren Seite wieder ein Rechteck mit denselben Seitenverhältnissen erhält.

Denn angenommen, die längere Seite sei a und die kürzere b. Dann muss man zwei Fälle unterscheiden: Die längere Seite des übriggebliebenen Rechtecks ist $a - b$ oder b. Im ersten Fall folgt

$$\frac{a}{b} = \frac{a-b}{b},$$

also $a = a - b$, ein Widerspruch. Es kann also nur der zweite Fall eintreten. Somit ist

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b},$$

und das war genau unsere ursprüngliche Definition für φ.

Warum machen wir uns aber die Mühe und beschäftigen uns mit Rechtecken? Nun, man kann diesen Prozess weiterführen und immer wieder ein Quadrat entfernen. Wenn man dies tut, so stellt man fest, dass die gegenüberliegenden Eckpunkte der Quadrate auf einer logarithmischen Spiralen, der *Goldenen Spiralen*, liegen. In Abbildung 16.1 ist dies angedeutet. Eine *logarithmische Spirale* ist eine Spirale, die den Radiusvektor immer unter dem gleichen Winkel schneidet.

Die Goldene Spirale soll nun genauer untersucht werden. Dazu berechnen wir zunächst die Längen der sukzessiv entstehenden Rechtecke. Durch Iteration der Verhältnisformel folgt sofort

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} = \frac{a-b}{-a+2b} = \frac{-a+2b}{2a-3b} = \frac{2a-3b}{-3a+5b} = \frac{-3a+5b}{5a-8b} = \frac{5a-8b}{-8a+13b} = \cdots .$$

Das Muster ist nicht schwer zu erkennen. Da die kürzere Seite des n-ten Rechtecks die längere Seite des $(n+1)$-ten Rechtecks ist, können wir uns darauf beschränken, die jeweils längere Seite des n-ten Rechtecks zu betrachten. Die obige Beispielrechnung führt uns zu der Vermutung, dass für diese Länge a_n gilt

$$a_n = (-1)^{n+1} F_{n-2} a + (-1)^n F_{n-1} b.$$

Wir beweisen dies durch vollständige Induktion. Da $F_{-1} = 1$, $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ ist der Induktionsanfang für a_1 und a_2 schon gemacht. Die Formel gelte nun für a_n und a_{n-1}. Dann

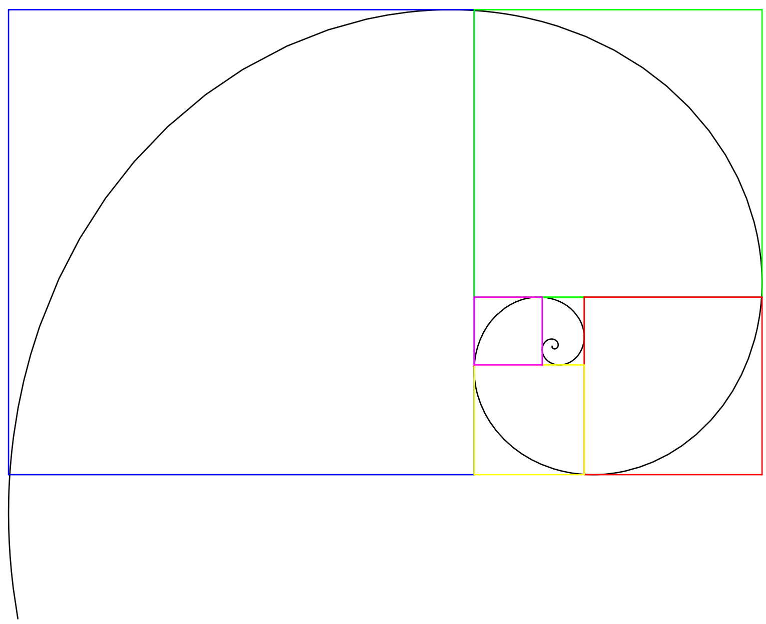

Abbildung 16.1: Definition der Goldenen Spiralen.

ist

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1} - a_n}$$

und laut Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} a_{n+1} = a_{n-1} - a_n &= (-1)^n F_{n-3} a + (-1)^{n-1} F_{n-2} b - (-1)^{n+1} F_{n-2} a - (-1)^n F_{n-1} b \\ &= (-1)^n F_{n-3} a + (-1)^{n-1} F_{n-2} b + (-1)^{n+2} F_{n-2} a + (-1)^{n+1} F_{n-1} b \\ &= (-1)^{n+2} F_{n-1} a + (-1)^{n+1} F_n b, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Nun machen wir uns daran, die Gleichung der Goldenen Spiralen zu finden. Dazu ist es zweckmäßig, zunächst ein geeignetes Koordinatensystem zu wählen. Betrachten wir Abbildung 16.2, so wählen wir das rote Geradenpaar als Koordinatensystem. Dabei ist die Abszisse die Gerade, die durch die linke untere Ecke des blauen Quadrats zur rechten unteren des grünen Quadrats führt.

Wir stellen uns nun vor, dass die Konstruktion mit dem großen grauen Rechteck anfängt. Wir bekommen das Rechteck in der zweiten Generation, wenn wir die Längen um φ stauchen und das Rechteck um $-\pi/2$ um den Ursprung der Spiralen drehen. Führen wir diesen Prozess fort, so erhalten wir immer kleinere Rechtecke. Analog kommt man von einem Rechteck zum vorherigen, indem man die Seiten um φ streckt und um $\pi/2$ dreht.

Wir wählen die Einheiten nun so, dass der Abstand vom Ursprung zur unteren rechten Ecke des grünen Quadrats gerade 1 ist. Der entsprechende Winkel ist dann 0 nach Wahl unserer Koordinatenachsen. Streckt man nun diese Strecke um φ und dreht um $\pi/2$, so erhält man gerade die Ecke des nächsten Rechtecks. Die sukzessiven Ecken haben also Radien $1, \varphi, \varphi^2, \ldots$

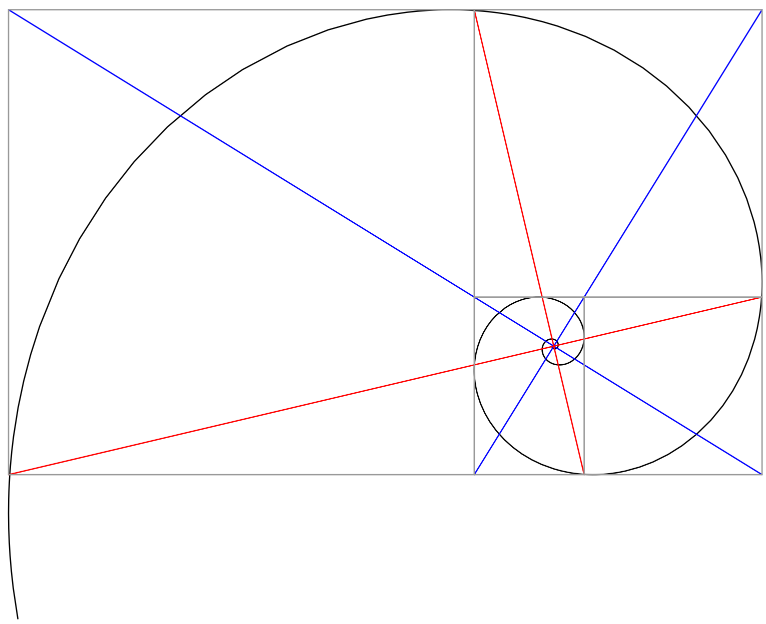

Abbildung 16.2: Konstruktion der Goldenen Spiralen.

und Winkel $0, \pi/2, \pi, \ldots$ Dreht man in die andere Richtung zu den kleineren Rechtecken hin, so sind die Radien $1, \varphi^{-1}, \varphi^{-2}, \ldots$ und die Winkel $0, -\pi/2, -\pi, \ldots$ Der Radius der Ecke des n-ten Rechtecks ist somit $r = \varphi^n$ und ihr Winkel $\vartheta = n\pi/2$. Damit lautet die Gleichung der Spirale in Polarform

$$r(\vartheta) = \varphi^{2\vartheta/\pi}.$$

17 Fibonacci n-Schritt Zahlen

Bei den herkömmlichen Fibonacci-Zahlen werden zur Berechnung der nächsten Zahl die beiden Vorgänger addiert. Man kann auch die letzten drei oder vier Vorgänger addieren, dann erhält man die Tribonacci- bzw. Tetranacci-Zahlen. Allgemein spricht man bei der Addition von n Vorgängern von den *Fibonacci n-Schritt Zahlen*.

Hierbei erfolgt die Definition nur für positive Zahlen, d.h. die F_k mit $k \leq 0$ sind 0. Auch die Zahlen $F_1 = F_2 = 1$ und $F_3 = 2$ sind festgelegt. Dann kann man schreiben

$$F_k = \sum_{i=1}^{n} F_{k-i}.$$

Man erhält dann z. B.:

- $n = 1$: $1, 1, 2, 2, 2, 2, \ldots$
- $n = 2$: $1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ (Fibonacci-Zahlen)
- $n = 3$: $1, 1, 2, 4, 7, 13, \ldots$ (Tribonacci-Zahlen)
- $n = 4$: $1, 1, 2, 4, 8, 15, \ldots$ (Tetranacci-Zahlen)

Allgemein ist der Grenzwert des Quotients sukzessiver Fibonacci n-Schritt Zahlen die Lösung der Gleichung:

$$x^n(2 - x) = 1.$$

Grenzwert ist das reelle $x > 1$, das diese Gleichung erfüllt. Für $n \to \infty$ konvergiert dieser Grenzwert gegen 2.

18 Das 4-Zahlen-Spiel

Zum Abschluss betrachten wir ein interessantes Spiel. Dazu zeichnet man ein Quadrat und schreibt in jede Ecke eine Zahl.

```
10---------15
 |         |
 |         |
 |         |
 |         |
 |         |
 8---------12
```

Dann schreibt man in die Mitte jeder Seite die Differenz aus den beiden Zahlen in der Ecke und bildet aus diesen ein neues Quadrat.

```
10-----5---15
 |   /   \  |
 |  /     \ |
 2          3
 |  \     / |
 |   \   /  |
 8-----4---12
```

Das wird so lange fortgesetzt, bis in jeder Ecke die Zahl 0 steht. Das Ziel des Spiels ist, möglichst viele Schritte zu benötigen.

Das Interessante ist nun, dass es einen Weg gibt, die Anzahl der Schritte vorauszuberechnen. Wählt man nämlich als Startzahlen die Tribonacci-Zahlen T_n bis T_{n-3}, so ist die Anzahl der Schritte $3 \cdot [n/2]$. Damit lassen sich Spiele unbegrenzter Länge erzeugen! Als Beispiel ein Spiel mit 6 Schritten: $n = 4$.

```
 4----------2
 |          |
 |          |
 |          |
 |          |
 |          |
 1----------1
```

Die folgenden Quadrate haben die Eckzahlen $(2; 1; 0; 3)$, $(1; 1; 3; 1)$, $(0; 2; 2; 0)$, $(2; 0; 2; 0)$, $(2; 2; 2; 2)$ und $(0; 0; 0; 0)$.

19 Aufgaben

1. Untersuche, wie schnell der Quotient sukzessiver Fibonacci-Zahlen gegen φ konvergiert!
2. Zeige, dass φ ebenfalls Grenzwert der Folgen $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}$ und $x_{n+1} = 1 + 1/x_n$ ist!
3. Beweise mit Hilfe der expliziten Fibonacci-Gleichung, dass der Quotient sukzessiver Fibonacci-Zahlen gegen φ konvergiert!
4. Zeige an der expliziten Gleichung, dass die negativen ganzen Fibonacci-Zahlen für ungerades n positiv und gerades n negativ sind!
5. Die Lucas-Zahlen L_n gehorchen der gleichen Rekursionsgleichung wie die Fibonacci-Zahlen, allerdings ist $L_1 = 1$ und $L_2 = 3$. Berechne eine explizite Gleichung!
6. Zeige, dass $\varphi^n = (L_n + \sqrt{5}F_n)/2$ gilt. Zeige dazu zunächst $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$.
7. Warum erhält man mit Binets Formel für reelle n fast nur komplexe Funktionswerte?
8. Beweise, dass für die negative Lösung der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\varphi &= -\frac{1}{x}\\ (-x)^n &= (-x)^{n+1} + (-x)^{n+2}\\ x^n &= (-\varphi)^{-n}\\ x^n &= x \cdot F_n + F_{n-1}\end{aligned}$$

9. Stelle die Zahlen von -10 bis 10 im Stellenwertsystem zur Basis φ dar! Versuche, kein Minus-Zeichen zu verwenden!
10. Berechne das achte Fibonacci-Polynom!
11. Gib eine Funktion an, deren Koeffizienten bei der Potenzreihenentwicklung die Fibonacci-Zahlen sind!
12. Warum benötigt die Darstellung in Fibonaccimal genau dann eine weitere Stelle, wenn sie aus alternierenden Nullen und Einsen besteht?

13. Finde eine Fibonaccimal-Darstellung für die Zahlen -1 bis -10 ohne die Verwendung eines Minus-Zeichens!
14. Weshalb kann man in Fibonaccimal nur ganze, aber keine reellen Zahlen darstellen?
15. Berechne mit der allgemeinen Gleichung für Fibonacci n-Schritt Zahlen den Grenzwert des Quotients sukzessiver Fibonacci-Zahlen!

Index