Gabriels Horn

Thomas Peters
Thomas' Mathe-Seiten
www.mathe-seiten.de

7. Februar 2005

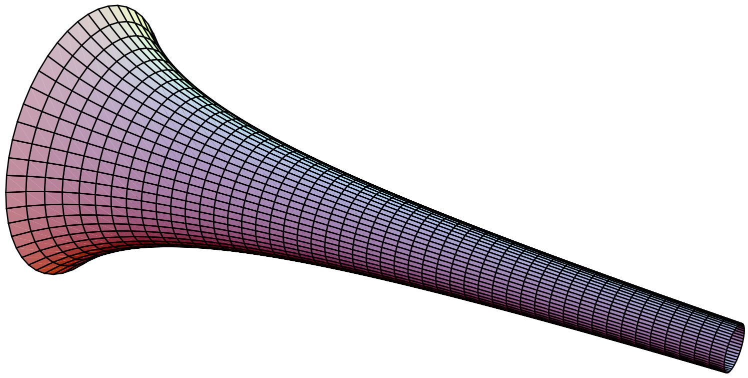

Abbildung 1.1: Gabriels Horn

In diesem Artikel werden wir uns etwas mit uneigentlichen Integralen und Rotationskörpern befassen. Es ist bekannt, dass für alle $f(x) = x^{-n}$ mit $n \geq 2$ das uneigentliche Integral von 1 bis ∞ existiert, denn

$$\int_1^\infty x^{-n}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{1-n}\,x^{1-n}\right]_1^\infty = \frac{1}{n-1}.$$

Die Fläche unter der Kurve von $f(x) = 1/x$ ist dagegen unbeschränkt, denn die Stammfunktion dieser Kurve ist der natürliche Logarithmus,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln x\right]_1^\infty = \infty.$$

Den Körper, der entsteht, wenn diese Kurve f um die x-Achse im Bereich $[1, \infty[$ rotiert, bezeichnet man als *Gabriels Horn* (aufgrund der Ähnlichkeit mit dem Musikinstrument). Er hat einige bemerkenswerte Eigenschaften.

Wie gesehen, ist die Schnittfläche durch diesen Körper längs der x-Achse und parallel zur y-Achse unendlich. Das Gesamtvolumen des Rotationskörpers dagegen ist endlich,

$$V = \pi \int_1^\infty f(x)^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \pi.$$

Doch als ob das nicht schon merkwürdig genug wäre: Die Gesamtoberfläche dieses Rotationskörpers ist ebenfalls unendlich,

$$M = 2\pi \int_1^\infty f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x \geq 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty.$$

Um dieses Paradoxon ganz deutlich zu machen: Einerseits bräuchte man unendlich viel Farbe, um die Mantelfläche des Horns vollständig zu bedecken. Andererseits könnte man sein Inneres mit endlich viel Farbe füllen, und seine Innenseite wäre dann vollständig mit Farbe bedeckt!