Kegelschnitte

Thomas Peters
Thomas’ Mathe-Seiten
www.mathe-seiten.de

14. April 2004

In diesem Artikel untersuchen wir eine Reihe von Kurven, die unter dem Überbegriff *Kegelschnitte* zusammengefasst werden. Der Name kommt daher, dass alle diese Kurven beim Schnitt einer Ebene mit einem Doppelkegel entstehen. Die Kegelschnitte haben bemerkenswerte geometrische Eigenschaften, auf die wir hier zu sprechen kommen werden.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Die Ellipse

Die *Ellipse* ist definiert als die Menge aller Punkte in der Ebene, für die die Summe der Abstände von den beiden *Brennpunkten* F_1 und F_2 denselben Wert hat. An der Definition liest man ab, dass diese Kurve beschränkt ist. Der Einfachheit halber legen wir die Brennpunkte auf die x-Achse, und zwar spiegelsymmetrisch zur y-Achse. Die Strecke vom Ursprung zum positiven Schnittpunkt der Kurve mit der x-Achse bezeichnet man als *große Halbachse* a, die Strecke vom Ursprung zum positiven Schnittpunkt der Kurve mit der y-Achse als *kleine Halbachse* b. Die Strecke von einem der beiden Brennpunkte zum Ursprung heißt *lineare Exzentrizität* e. Bezeichne $\vec{r_1}$ den Vektor vom Brennpunkt F_1 zum Punkt der Ellipse und $\vec{r_2}$ den Vektor vom Brennpunkt F_2. Dann soll $|\vec{r_1}|+|\vec{r_2}|$ konstant sein. Betrachten wir den Punkt $(a|0)$ auf der Ellipse, so finden wir

$$|\vec{r_1}| + |\vec{r_2}| = (e + a) + (a - e) = 2a.$$

Da diese Gleichung auch für einen Punkt $(0, b)$ auf der y-Achse erfüllt sein muss, folgt aus Symmetriegründen $|\vec{r_1}| = |\vec{r_2}| = a$ und mit dem Satz des Pythagoras

$$e^2 + b^2 = a^2.$$

Wir werden nun die Gleichung der Ellipse in kartesischen Koordinaten herleiten. Für einen Punkt $(x|y)$ der Ellipse gilt

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x + e)^2 + y^2 = x^2 + 2ex + e^2 + y^2, \qquad (*) \\ r_2^2 &= (x - e)^2 + y^2 = x^2 - 2ex + e^2 + y^2 \end{aligned}$$

und nach Subtraktion

$$r_1^2 - r_2^2 = 4ex.$$

Andererseits ist $r_1^2 - r_2^2 = (r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = 2a(r_1 - r_2)$ und damit

$$r_1 - r_2 = 2\frac{e}{a}x.$$

Die Größe e/a heißt *numerische Exzentrizität* ε und ist zur Normierung der Ellipse sinnvoll, denn es gilt stets $0 \leq \varepsilon < 1$. Man kann nun r_1 und r_2 besimmen zu

$$\begin{aligned} r_1 &= a + \frac{e}{a}x \\ r_2 &= a - \frac{e}{a}x \end{aligned}$$

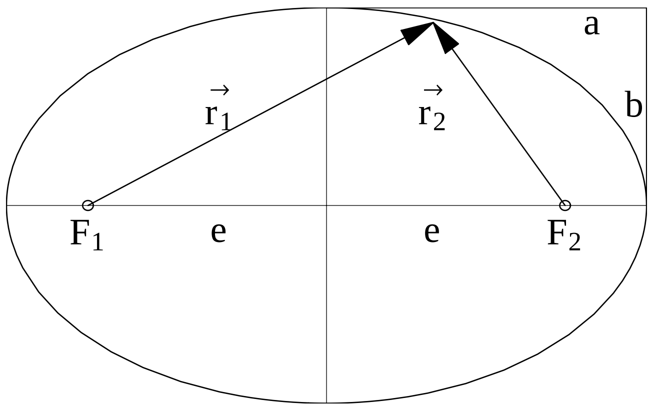

Abbildung 1.1: Zur Definition der Ellipse.

Den Ausdruck für r_1 in $(*)$ einsetzen ergibt nach kurzer Rechnung die Gleichung der Ellipse in kartesischen Koordinaten

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Mit $a = b = r$ erhält man als wichtigen Spezialfall den *Kreis*. Hier fallen beide Brennpunkte zusammen.

Als nächstes suchen wir eine Gleichung der Ellipse in Polarkoordinaten. Dazu verschieben wir die Ellipse so, dass F_2 im Urpsrung liegt. $\vec{r}$ ist der Ortsvektor eines Punktes auf der Ellipse und θ der Winkel zwischen der positiven x-Achse und $\vec{r}$. Dann gilt

$$r = r_2 = a - \frac{e}{a}x = a - \frac{e}{a}\,(e + r\cos\theta) = p - \varepsilon r\cos\theta$$

mit dem *Parameter* $p = b^2/a$. Damit erhalten wir die Gleichung der Ellipse in Polarkoordinaten

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\theta}.$$

Mit $\varepsilon = 0$ ergibt sich wieder der Kreis als Spezialfall.

Da die Ellipse eine beschränkte Kurve ist, können wir ihren Flächeninhalt berechnen. Und zwar ist

$$\begin{aligned} A &= 2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\frac{b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]_{-a}^{a} \\ &= \pi ab. \end{aligned}$$

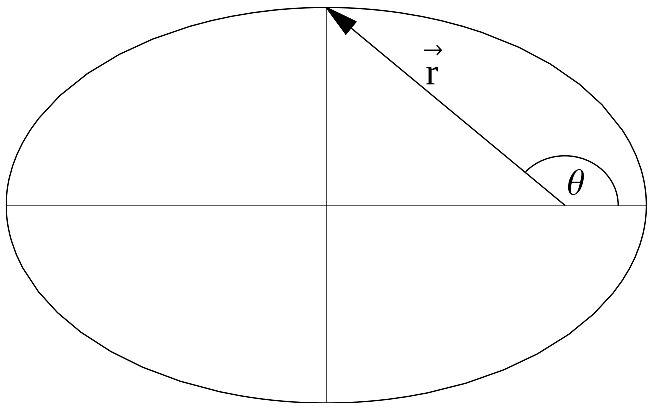

Abbildung 1.2: Ellipse in Polarkoordinaten.

Natürlich ergibt sich für $a = b = r$ die bekannte Formel der Kreisfläche $A = \pi r^2$.

Bei der Berechnung des Ellipsenumfangs stoßen wir allerdings auf Probleme: Die Ellipse kann durch

$$\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t \end{aligned}$$

parametrisiert werden. Daher ist der Umfang

$$\begin{aligned} U &= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, \mathrm{d}t \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, \mathrm{d}t \\ &= b \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\frac{a^2}{b^2} \sin^2 t + 1 - \sin^2 t}\, \mathrm{d}t \\ &= b \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right) \sin^2 t}\, \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

was leider nicht analytisch lösbar ist. Stammfunktionen solcher Integrale bezeichnet man als *Elliptische Integrale*. Lediglich im Fall $a = b = r$ wird der Term trivialerweise zu $U = 2\pi r$.

2 Die Hyperbel

Die Menge aller Punkte, für die die Differenz der Abstände zu zwei Brennpunkten konstant ist, heißt *Hyperbel*. Diese Kurve ist sicher unbeschränkt. Außerdem ist sie zweigeteilt, denn in der Mitte zwischen den beiden Brennpunkten ist die Differenz sicher unterhalb jeder vorgegebenen Konstanten. Diese beiden Teile heißen *Hyperbeläste*. Wir wählen die Bezeichnungen wie bei der Ellipse, nur ist nun $|\vec{r_1}| - |\vec{r_2}|$ konstant. Es folgen die gleichen Symmetrien wie bei der Ellipse, nur gibt es nun zwei Äste mit $r_1 > r_2$ und $r_1 < r_2$. Es folgt analog zur Ellipse

$$|r_1 - r_2| = 2a,$$

jedoch ist diesmal

$$e^2 = a^2 + b^2$$

definiert. Man setzt $\varepsilon = e/a$ und $p = b^2/a$ wie bekannt und erhält als Gleichung der Hyperbel in kartesischen Koordinaten

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Nun legen wir diesmal F_1 in den Ursprung und erhalten als Gleichung der Hyperbel in Polarkoordinaten

$$r = \frac{p}{-1 + \varepsilon \cos\theta}$$

oder

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\theta},$$

was ebenfalls dieselbe Hyperbel beschreibt (warum?). Man beachte, dass diesmal $\varepsilon > 1$ gilt.

Anders als die Ellipse besitzt die Hyperbel *Asymptoten*. Da r für $\cos\theta = -1/\varepsilon$ über alle Grenzen wächst, ergibt sich der Winkel der Asymptoten im 1. Quadranten zur positiven x-Achse zu $\theta_{\infty,1} = \arccos(-1/\varepsilon)$. Aus Symmetriegründen erhält man die anderen Asymtotenwinkel zu $\theta_{\infty,2} = \pi - \theta_{\infty,1}$, $\theta_{\infty,3} = \pi + \theta_{\infty,1}$ und $\theta_{\infty,4} = 2\pi - \theta_{\infty,1}$.

Die Gleichungen der Asymptoten erhält man aus der Gleichung der Hyperbel für $x \gg 0$ zu

$$y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \approx \pm\frac{b}{a}x.$$

Die Hyperbel wird durch

$$x = \pm a \cosh t$$
$$y = b \sinh t$$

parametrisiert, daher kommt auch der Name der *Hyperbelfunktionen*.

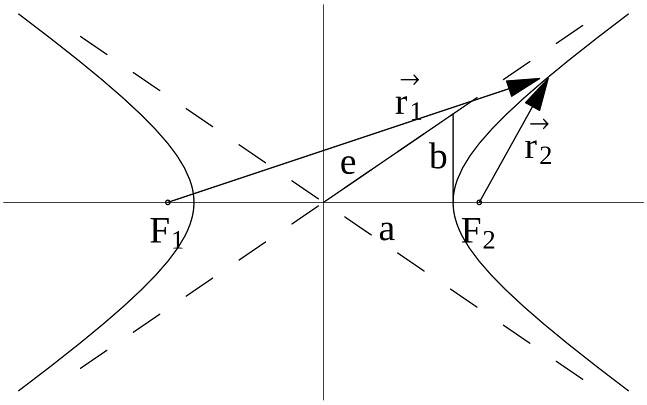

Abbildung 2.1: Zur Definition der Hyperbel.

3 Die Parabel

Die *Parabel* ist die Menge aller Punkte, die von einem Brennpunkt F und einer Geraden G denselben Abstand haben. Wir legen F auf die x-Achse und lassen G die x-Achse senkrecht schneiden. Den Koordinatenursprung legen wir in die Mitte zwischen F und dem Schnittpunkt der x-Achse mit G. Den Abstand von F zum Schnittpunkt von G mit der x-Achse nennen wir p. Dann gilt laut Definition:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

oder

$$y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2} - \left(x - \frac{p}{2}\right)\right)\left(x + \frac{p}{2} + \left(x - \frac{p}{2}\right)\right) = 2px.$$

Daraus folgt, dass der *Scheitelpunkt* der Parabel im Koordinatenursprung liegt.

Wir werden nun aus Gründen, die später einsichtig werden, die Parabel an der y-Achse spiegeln und erhalten

$$y^2 = -2px.$$

Die Parabelgleichung in Polarkoordinaten mit dem Brennpunkt im Ursprung erhält man durch

$$r^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} - 2px = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2,$$

also

$$r = x - \frac{p}{2}$$

und der Definition der Polarkoordinaten

$$x + \frac{p}{2} = r\cos\theta$$

zu

$$r = x - \frac{p}{2} = r\cos\theta - p = -\frac{p}{1-\cos\theta} = \frac{p}{-1+\cos\theta},$$

oder, was äquivalent dazu ist (warum?):

$$r = \frac{p}{1+\cos\theta}.$$

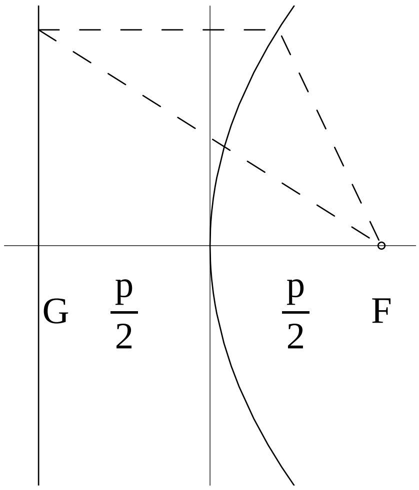

Abbildung 3.1: Zur Definition der Parabel.

4 Brennstrahleigenschaften

Die Strecken, die die Brennpunkte eines Kegelschnitts mit der Kurve verbinden, nennt man *Brennstrahlen*. Diese Brennstrahlen haben bei den Kegelschnitten einige interessante Eigenschaften.

Zunächst gilt sowohl für die Ellipse wie für die Hyperbel, dass die Normale den Winkel zwischen den Brennstrahlen halbiert. Das bedeutet für die Ellipse, dass ein Strahl, der von einem Brennpunkt ausgeht, in den anderen Brennpunkt reflektiert wird (das macht man sich z.B. bei Flüstergewölben und Nierenzertrümmerern zu nutze) und für die Hyperbel, dass ein an der Hyperbel reflektierter Brennstrahl so aussieht, als wäre er vom anderen Brennpunkt ausgegangen (das verwendet man bei Spiegelteleskopen).

Der Beweis gelingt sehr schnell mit Hilfe der Vektoranalysis. Wenn die Normale den Winkel zwischen den Brennstrahlen halbiert, dann ist der Winkel zwischen den Brennstrahlen und der Tangente an die Kurve gleich groß. Wir führen nun den Beweis für die Ellipse und Hyperbel gleichzeitig. Sei $\vec{t}$ der Tangenteneinheitsvektor, so gilt

$$\vec{\nabla}(|\vec{r_1}| \pm |\vec{r_2}|) \cdot \vec{t} = 0$$

und damit

$$\vec{\nabla}|\vec{r_1}| \cdot \vec{t} = \mp\vec{\nabla}|\vec{r_2}| \cdot \vec{t}.$$

Für ein Radialfeld gilt $\vec{\nabla} r = \vec{r}/r$ und deshalb

$$\frac{\vec{r_1} \cdot \vec{t}}{r_1} = \mp\frac{\vec{r_2} \cdot \vec{t}}{r_2}$$

bzw.

$$\cos\angle(r_1, t) = \mp\cos\angle(r_2, t)$$

oder

$$\angle(r_1, t) = \angle(r_2, t). \qquad \square$$

Die Parabel hat eine andere Brennstrahleigenschaft: Alle Brennstrahlen werden an der Parabel parallel zur x-Achse reflektiert (Anwendung in Parabolspiegeln und Richtantennen).

Laut Definition der Parabel ist $\overline{AP} = \overline{PF}$. Wir konstruieren im Dreieck ΔAPF die Mittelsenkrechte t auf $\overline{AF}$ durch P. Weitere Punkte auf t haben von F und A den gleichen Abstand, sind damit näher an G als an F. Deshalb liegt außer P kein weiterer Punkt von t auf der Parabel, also ist t die Tangente an die Parabel durch P. Sei n die Normale an diesem Punkt. Da die Winkel, die t mit den gestrichelten Geraden in P einschließt alle gleich groß sind, sind auch die Winkel, die n mit diesen einschließt, gleich. $\square$

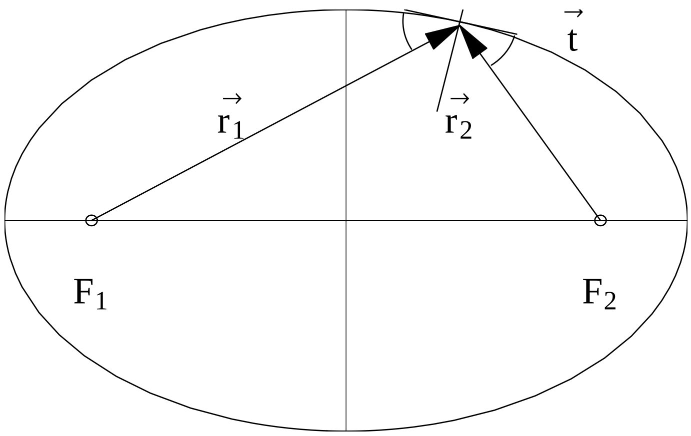

Abbildung 4.1: Brennstrahleigenschaften der Ellipse.

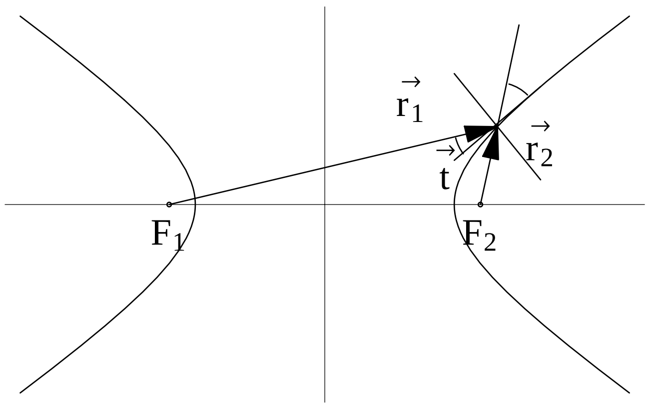

Abbildung 4.2: Brennstrahleigenschaften der Hyperbel.

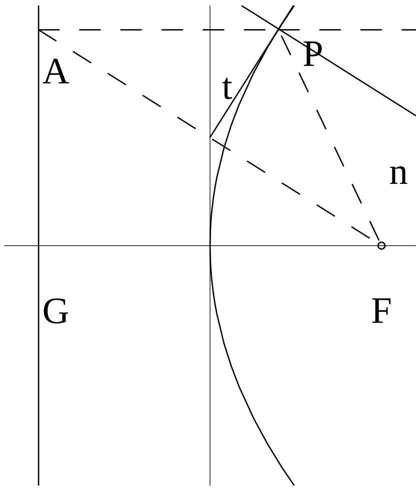

Abbildung 4.3: Brennstrahleigenschaften der Parabel.

5 Die Vewandtschaft der Kegelschnitte

Die Verwandtschaft der Kegelschnitte zeigt sich sehr schön in der Gleichung

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}.$$

($0 \leq \varepsilon < 1$: Ellipse, $\varepsilon = 1$: Parabel, $\varepsilon > 1$: Hyperbel) Die folgende Animation zeigt die Kegelschnitte mit zunehmender numerischer Exzentrizität. Es ist nun einsichtig, wieso wir zur Bestimmung der Polarkoordinaten wechselnde Brennpunkte genommen haben. Im Grenzfall $\varepsilon \to \infty$ scheint der Kegelschnitt in eine Gerade überzugehen.

Diese Verwandtschaft ist natürlich kein Zufall. Man kann sich leicht einen Doppelkegel vorstellen, der von einer Ebene geschnitten wird. Verläuft diese Ebene parallel zur Grundfläche des Kegels, so entsteht ein Kreis als Schnittfläche. Neigt man die Ebene nun ein wenig, so wird aus dem Kreis eine Ellipse. Neigt man die Ebene weiter, so dass der Winkel der Ebene mit der Grundfläche des Kegels gleich der Neigung des Kegelmantels gegen die Grundfläche ist, so erhält man eine Parabel. Bei noch größerem Winkel bekommt man schließlich eine Hyperbel, denn die Ebene schneidet nun beide Hälften des Doppelkegels.

Es gibt aber noch weitere Kegelschnitte. Verläuft die Ebene genau durch die Spitze des Kegels, so ist der Kegelschnitt ein einziger Punkt. Liegt die Ebene senkrecht zur Grundfläche und verläuft durch die Spitze, so besteht der Kegelschnitt aus zwei sich schneidenden Geraden. Zu guter Letzt kann die Ebene auch eine Tangentialebene des Doppelkegels sein, dann ist der Kegelschnitt eine einzige Gerade. Diese Kegelschnitte heißen *entartet*.

Zur quantitativen Behandlung wählen wir den Doppelkegel mit der Spitze im Koordinatenursprung, und die Symmetrieachse falle mit der z-Achse zusammen. Wir nehmen an, dass die Grundfläche des Kegels ein Kreis ist. Dann wird der Kegel beschrieben durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = kz^2,$$

wobei $k > 0$ ein Skalierungsfaktor ist. Beim Schnitt dieses Doppelkegels mit einer Ebene müssen wir zwei Fälle unterscheiden: Die Ebene ist senkrecht zur x-y-Ebene, oder sie ist es nicht. Ist sie es nicht, so können wir das Koordinatensystem stets so um die z-Achse drehen, dass die Ebenengleichung die Form

$$z = mx + h$$

annimmt. Durch Spiegelung an der x-y-Ebene können wir zusätzlich erreichen, dass $m \geq 0$ ist.

Setzen wir nun die Ebenengleichung in die Kegelgleichung ein, so erhalten wir

$$x^2 + y^2 = k(mx + h)^2 = km^2x^2 + 2kmxh + kh^2$$

und somit

$$(1 - km^2)x^2 - 2kmxh + y^2 = kh^2.$$

An dieser Stelle ist es sinnvoll, eine Variable $c = 1/\sqrt{k}$ einzuführen, wodurch man

$$(c^2 - m^2)x^2 - 2mxh + c^2y^2 = h^2$$

erhält. In der weiteren Diskussion müssen wir Fallunterscheidungen bzgl. h, m und c vornehmen.

Wir betrachten zunächst die entarteten Kegelschnitte. Ist $h = 0$, so geht die Ebene durch den Koordinatenursprung. Obige Gleichung vereinfacht sich dann zu

$$(c^2 - m^2)x^2 = -c^2y^2.$$

Ist nun $m < c$, so ist die linke Seite dieser Gleichung positiv, die rechte aber negativ. Dies kann nur für $x = y = 0$ erfüllt sein. Der Kegelschnitt ist also der Koordinatenursprung. Ist $m = c$, so verschwindet die rechte Seite, und es bleibt nur $y = 0$ als Bedingung. Die Ebene ist eine Tangentialebene an den Kegel, und der Kegelschnitt ist eine Gerade auf dem Kegelmantel in der x-z-Ebene. Ist schließlich $m > c$, so kann man die Gleichung auf die Form

$$\sqrt{m^2 - c^2}x = \pm cy$$

bringen. Der Kegelschnitt ist ein sich im Ursprung schneidendes Paar von Geraden auf dem Kegelmantel.

Die eigentlichen Kegelschnitte findet man für $h \neq 0$. Offensichtlich ist der Fall, bei dem die Ebene parallel zur x-y-Ebene verläuft, d. h. $m = 0$. Man erhält dann

$$x^2 + y^2 = \frac{h^2}{c^2},$$

also einen Kreis mit Radius $|h/c|$ in der Ebene $z = h$. Ist $m < c$, so liefert eine quadratische Ergänzung

$$\left(\sqrt{c^2 - m^2}x - \frac{hm}{\sqrt{c^2 - m^2}}\right)^2 - \frac{h^2m^2}{c^2 - m^2} + c^2y^2 = h^2$$

bzw.

$$\left(\sqrt{c^2 - m^2}x - \frac{hm}{\sqrt{c^2 - m^2}}\right)^2 + c^2y^2 = h^2 + \frac{h^2m^2}{c^2 - m^2}.$$

Substituiert man

$$\widetilde{x} = \sqrt{c^2 - m^2}x - \frac{hm}{\sqrt{c^2 - m^2}},$$

so lässt sich dies auf die Ellipsengleichung

$$\frac{\widetilde{x}^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit den Halbachsen

$$a = \sqrt{h^2 + \frac{h^2m^2}{c^2 - m^2}}$$

und

$$b = \frac{1}{c}a$$

bringen. Im Fall $m = c$ wird

$$-2cxh + c^2y^2 = h^2$$

und weiter

$$x = \frac{c}{2h}y^2 - \frac{h}{2c},$$

was die Parabelgleichung ist. Nun bleibt noch der Fall $m > c$ zu betrachten. Hier ergänzen wir erneut quadratisch

$$\left(\sqrt{m^2 - c^2}x + \frac{hm}{\sqrt{m^2 - c^2}}\right)^2 - \frac{h^2m^2}{m^2 - c^2} - c^2y^2 = -h^2,$$

was uns auf die Gleichung

$$\left(\sqrt{m^2 - c^2}x + \frac{hm}{\sqrt{m^2 - c^2}}\right)^2 - c^2y^2 = \frac{h^2m^2}{m^2 - c^2} - h^2$$

führt. Dies wird durch die Substitution

$$\widetilde{x} = \sqrt{m^2 - c^2}x + \frac{hm}{\sqrt{m^2 - c^2}}$$

zur Hyberbelgleichung

$$\frac{\widetilde{x}^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit

$$a = \sqrt{\frac{h^2m^2}{m^2 - c^2} - h^2}$$

sowie

$$b = \frac{1}{c}a.$$

Es fehlt noch der Fall, dass die Ebene senkrecht zur x-y-Ebene steht. In diesem Fall können wir das Koordinatensystem so um die z-Achse drehen, dass die Ebenengleichung von der Form

$$x = d$$

ist. Eingesetzt in die Kegelgleichung folgt

$$d^2 + y^2 = kz^2.$$

Ist $d = 0$, so ist die Ebene die y-z-Ebene, und der Kegelschnitt ist das Paar von Geraden

$$cy = \pm z.$$

Ist $d \neq 0$, so erhält man erneut einen Hyperbel mit

$$\frac{z^2}{(cd)^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1.$$

Index