Die Kettenlinie

Thomas Peters
Thomas' Mathe-Seiten
www.mathe-seiten.de

9. Mai 2010

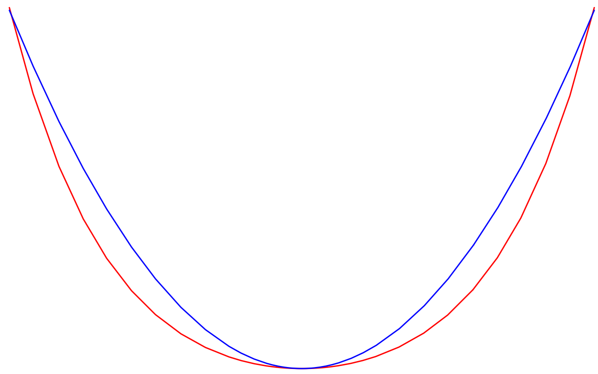

Abbildung 1.1: Im Bild ist rot die Kettenlinie und blau die Parabel dargestellt.

In diesem Artikel machen wir einen kleinen Abstecher in die Physik, genauer gesagt in die Mechanik, und fragen uns: Welche Form nimmt eine Kette oder eine Schnur an, wenn man sie an ihren Enden aufhängt? Nach oberflächlichem Betrachten würde man sagen, eine Parabel, doch das ist nicht richtig. Wie die Kurve tatsächlich aussieht, und wie man trotzdem an eine Parabel kommt, untersuchen wir hier.

Die Kette an sich

Dass es sich nicht um eine Parabel handeln kann, sieht man leicht ein, indem man eine Parabel zeichnet und versucht, eine Schnur so aufzuhängen, dass sie sich decken — es wird nicht funktionieren (siehe Abbildung 1.1)!

Der Name *Kettenlinie* leitet sich von der Betrachtung einer Kette ab. Tatsächlich ist die Kette mathematisch schwer zu handhaben, da ihre Dichte aufgrund der Kettenglieder ständig variiert. Deshalb werden wir eine Schnur bzw. ein Seil betrachten, bei dem die Dichte als konstant angenommen werden kann. Man erhält mathematisch ein Seil aus einer Kette, wenn die Größe der Kettenglieder vernachlässigbar klein ist.

Gehen wir also von einem Seil mit konstanter Dichte, d. h. homogen verteilter Masse auf seiner gesamten Länge, aus und befestigen es an seinen Enden. Nachdem es seine endgültige Lage eingenommen hat, befindet es sich in Ruhe. Das bedeutet, dass die Summe der *Kräfte*, die in jedem Punkt des Seils angreifen, Null ist. Betrachten wir dieses Kräftegleichgewicht auf einem kleinen Seilstück der Länge Δs rechts vom Minimum (siehe Abbildung 1.2).

Auf die beiden Enden dieses Seilstücks wirken jeweils *Spannungskräfte* tangential an die Seilkurve. Am rechten Ende des Seilstücks wirkt die Kraft $\mathbf{T}(s + \Delta s)$ nach rechts oben und am linken Ende entsprechend die Kraft $-\mathbf{T}(s)$ nach links unten. Zusätzlich wirkt auf das Seilstück noch die *Gewichtskraft* $\mathbf{G}$, die die Erde auf das Seil ausübt. Bezeichnet λ die Masse pro Längeneinheit des Seils, so hat die Gewichtskraft die Gestalt $G = \lambda \Delta s g$ mit der Erdbeschleunigung g. Die Gewichtskraft wirkt senkrecht nach unten.

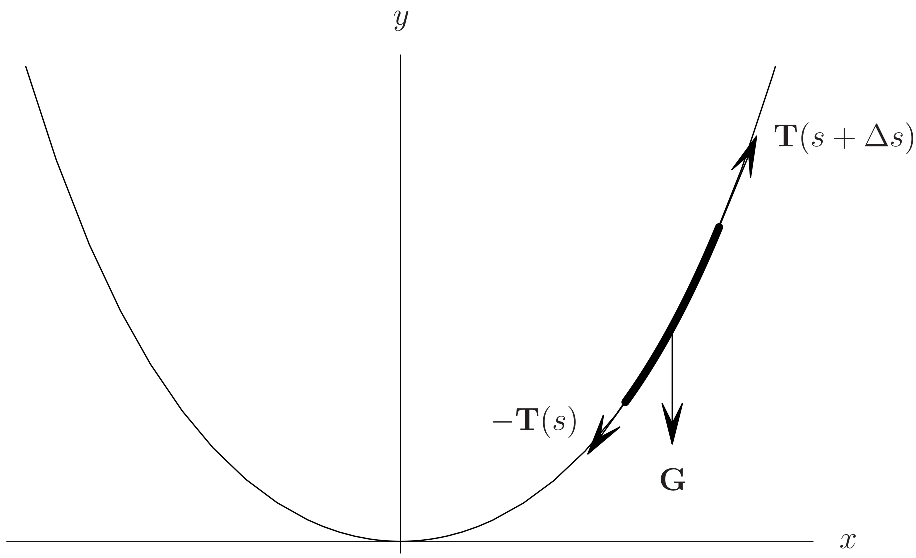

Abbildung 1.2: Die beiden Spannungskräfte und die Gewichtskraft am Seilstück der Länge Δs.

Damit haben wir als Kräftebilanz also

$$\mathbf{T}(s+\Delta s) - \mathbf{T}(s) - \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda g \end{pmatrix} \Delta s = 0$$

oder, nach Division durch Δs,

$$\frac{\mathbf{T}(s+\Delta s) - \mathbf{T}(s)}{\Delta s} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda g \end{pmatrix}.$$

Auf der linken Seite der Gleichung steht nun gerade der Differenzenquotient für die Spannung $\mathbf{T}$, so dass wir im Limes $\Delta s \to 0$ erhalten

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda g \end{pmatrix}.$$

Da auf der rechten Seite dieser Differentialgleichung nur Konstanten stehen, lässt sich die Gleichung leicht integrieren, und man erhält

$$\mathbf{T}(s) = \begin{pmatrix} C_1 \\ \lambda g s + C_2 \end{pmatrix}$$

mit den Integrationskonstanten C_1 und C_2. Wir sehen somit, dass die Horizontalkomponente $S = C_1$ der Spannungskraft an jedem Punkt der Kurve gleich ist, wohingegen ihre Vertikalkomponente von der Position auf der Kurve abhängt. Sie muss am tiefsten Punkt der Seilkurve verschwinden, da die Kurve dort eine horizontale Tangente hat. Vereinbaren wir, dass wir die Bogenlänge von diesem Minimum aus messen, so verschwindet die zweite Integrationskonstante, $C_2 = 0$, und wir erhalten

$$\mathbf{T}(s) = \begin{pmatrix} S \\ \lambda g s \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\mathbf{T}$ zeigt an jedem Punkt der Seilkurve in Richtung ihrer Tangente. Was wir suchen ist aber eine Beschreibung der Form $y(x)$, also die Abhängigkeit der Ordinate y als Funktion der Abszisse x. Wir legen den Ursprung dieses Koordinatensystems in das Minimum der Seilkurve und parametrisieren x und y als Funktion der Bogenlänge s so, dass der Tangentialvektor $(x'(s), y'(s))^\top$ stets die Länge 1 hat, es gelte also

$$\mathbf{T}(s) = T(s)\begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}.$$

Dann folgt mit der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(s)}{x'(s)} = \frac{\lambda g s}{S},$$

also

$$s = \frac{S}{\lambda g}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Andererseits ist die Bogenlänge durch das Integral

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + y'(\widetilde{x})^2}\,\mathrm{d}\widetilde{x}$$

gegeben. Setzt man beide Ausdrücke gleich und differenziert einmal nach x, so erhält man

$$y''(x) = \frac{\lambda g}{S}\sqrt{1 + y'(x)^2}.$$

Diese Differentialgleichung lässt sich leicht lösen. Dazu substituieren wir zunächst $z = y'(x)$ und dividieren durch die Wurzel,

$$\frac{z'(x)}{\sqrt{z^2(x) + 1}} = \frac{\lambda g}{S}.$$

Im Artikel über Areafunktionen wurde gezeigt, dass der Areasinus Hyperbolicus gegeben ist durch

$$\operatorname{arsinh}(z) = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}).$$

Folglich ist nach der Kettenregel

$$\begin{aligned}\operatorname{arsinh}'(z) &= \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right)\frac{1}{z + \sqrt{z^2+1}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{z^2+1} + z}{\sqrt{z^2+1}}\right)\frac{1}{z + \sqrt{z^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}.\end{aligned}$$

Eine weitere Anwendung der Kettenregel liefert

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arsinh}(z(x)) = \frac{z'(x)}{\sqrt{z^2(x)+1}},$$

was gerade die linke Seite der Differentialgleichung ist. Damit können wir die Differentialgleichung also direkt integrieren und erhalten aus

$$\int\limits_0^x \frac{z'(\widetilde{x})}{\sqrt{z^2(\widetilde{x})+1}}\,\mathrm{d}\widetilde{x} = \frac{\lambda g}{S}\int\limits_0^x \mathrm{d}\widetilde{x}$$

sogleich

$$\operatorname{arsinh}(z(x)) - \operatorname{arsinh}(z(0)) = \frac{\lambda g}{S}x.$$

Nun ist aber $z(0) = y'(0) = 0$, da die Seilkurve im Nullpunkt eine horizontale Tangente hat, und somit folgt

$$\operatorname{arsinh}(z(x)) = \frac{\lambda g}{S}x$$

und weiter

$$z(x) = y'(x) = \sinh\left(\frac{\lambda g}{S}x\right).$$

Eine weitere Integration liefert wegen $\cosh'(x) = \sinh(x)$ sofort

$$y(x) = \frac{S}{\lambda g}\cosh\left(\frac{\lambda g}{S}x\right) - \frac{S}{\lambda g}.$$

Hier haben wir die Integrationskonstante gleich so gewählt, dass $y(0) = 0$ gilt. Die Seilkurve bzw. Kettenlinie ist also in der Tat keine Parabel!

Die Kette mit Gewicht

Anders sieht es aus, wenn der Grund für das Durchhängen des Seils nicht nur sein eigenes Gewicht ist, sondern das Seil etwas trägt, wie es z. B. bei Hängebrücken der Fall ist.

Angenommen, das angehängte Gewicht ist (z. B. durch in gleichem Abstand angebrachte vertikale Seile) gleichmäßig auf das gesamte tragende Seil verteilt. Dann ist das Eigengewicht des Seils vernachlässigbar. Vielmehr ist für die Gewichtskraft, die in einem Punkt ausgeübt wird, die Länge des Gewichts vom Minimum des Seils bis zum betrachteten Punkt wichtig. Wir haben daher diesmal

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\lambda x g}{S},$$

wobei λ nun die Masse pro Längeneinheit des Gewichts bezeichnen möge. Eine einfache Integration liefert sogleich

$$y(x) = \frac{\lambda g}{2S}x^2,$$

da wieder $y(0) = 0$ gelten möge. Diesmal erhalten wir tatsächlich eine Parabel!

Der Energieansatz

Ein sehr eleganter, wenn auch etwas fortgeschrittener Ansatz ist der folgende: Wann immer ein Körper sich selbst überlassen wird, neigt er dazu, seine potentielle Energie zu minimieren. Hat man die Kette einmal aufgehängt, so hat sie, nachdem sie zur Ruhe gekommen ist, gerade die Form, die ihrer geringsten potentiellen Energie entspricht.

Betrachtet man ein Massenelement $\mathrm{d}m$, so hat es die potentielle Energie $\mathrm{d}E_{\mathrm{pot}} = gy\,\mathrm{d}m$. Die gesamte potentielle Energie der Kette ist dann

$$E_{\mathrm{pot}} = g \int_{x_1}^{x_2} y\,\mathrm{d}m,$$

wenn die Kette an den Stellen x_1 und x_2 befestigt ist. Wir wandeln nun dieses Integral in ein Integral über x um. Dazu rechnen wir

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}s} = \frac{\rho\,\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s} = \rho\frac{A\,\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s} = \rho A,$$

wobei A die Querschnittsfläche der Kette und ρ die Massendichte ist. Damit erhält man

$$E_{\mathrm{pot}} = g \int_{x_1}^{x_2} \rho A y\,\mathrm{d}s = g\rho A \int_{x_1}^{x_2} y\,\mathrm{d}s = g\rho A \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x,$$

denn es ist

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

In der *Variationsrechnung* lernt man, dass das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\,\mathrm{d}x$$

dann extremal[1] wird, wenn die *Euler-Lagrange-Gleichung*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'} - \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y} = 0$$

erfüllt ist. Angewandt auf $f(x,y,y') = y\sqrt{1+y'^2}$ ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} - \sqrt{1+y'^2} = 0$$

[1]Genau genommen folgt die Euler-Lagrange-Gleichung schon, wenn das Integral stationär wird. In unserem Fall handelt es sich jedoch tatsächlich um ein Minimum.

$$\Rightarrow \qquad \frac{(y'^2+yy'')\sqrt{1+y'^2}-yy'\dfrac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2}-\sqrt{1+y'^2}=0.$$

Durch Multiplikation mit $\sqrt{1+y'^2}(1+y'^2)$ folgt

$$(y'^2+yy'')(1+y'^2)-yy'^2y''-(1+y'^2)^2=0.$$

Ausmultiplizieren liefert

$$y'^2+y'^4+yy''+yy''y'^2-yy'^2y''-1-2y'^2-y'^4=0$$

und anschließendes Zusammenfassen

$$y'^2-yy''+1=0. \tag{$*$}$$

Diese Differentialgleichung ist nun nicht mehr so einfach zu lösen wir vorhin, aber man rechnet sofort nach, dass die Kettenlinie diese Gleichung erfüllt. Zu ihrer Lösung differenzieren wir zunächst nach x und erhalten

$$2y'y''-y'y''-yy'''=0,$$

was man auch schreiben kann als

$$-y^2\left(\frac{y''}{y}\right)'=0.$$

Da wir den trivialen Fall $y\equiv 0$ ausschließen können folgt damit $(y''/y)'=0$ bzw.

$$y''=cy$$

mit irgendeiner Konstanten c. Diese Differentialgleichung ist sehr bekannt; ein Fundamentalsystem ist

$$\{\mathrm{e}^{\sqrt{c}x},\mathrm{e}^{-\sqrt{c}x}\},$$

d. h. jede Lösung lässt sich als Linearkombination dieser beiden Funktionen schreiben. Aus Bequemlichkeitsgründen wählen wir jedoch ein anderes Fundamentalsystem. Nennen wir die erste Funktion y_1 und die zweite y_2, so betrachten wir das System

$$\left\{\frac{y_1+y_2}{2},\frac{y_1-y_2}{2}\right\}=\{\cosh\sqrt{c}x,\sinh\sqrt{c}x\}.$$

Durch Einsetzen von $y''=cy$ in $(*)$ folgt

$$y'^2-cy^2+1=0.$$

Bevor wir nun in diese Gleichung mit dem Ansatz $y(x)=a_1\cosh\sqrt{c}x+a_2\sinh\sqrt{c}x$ gehen, überlegen wir uns, dass aus Symmetriegründen $y(-x)=y(x)$ gelten muss, woraus sofort $a_2=0$ folgt. Nun rechnen wir

$$a_1^2c\sinh^2\sqrt{c}x-ca_1^2\cosh^2\sqrt{c}x+1=0$$

und weiter

$$a_1^2 c(\sinh^2 \sqrt{c}x - \cosh^2 \sqrt{c}x) = -1,$$

was wegen $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ auf $c = 1/a_1^2$ führt. Die endgültige Lösung ist damit

$$y(x) = a_1 \cosh\left(\frac{1}{a_1}x\right),$$

deren Integrationskonstante noch durch eine Anfangsbedigung festgelegt werden muss.

Eine alternative Herleitung

Bei der obigen Rechnung mussten wir eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die unbestimmte Funktion $y(x)$, welche Lösung der allgemeinen Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'} - \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y} = 0$$

mit $f(x,y,y') = y\sqrt{1+y'^2}$ ist, lösen. Die Ordnung der Differentialgleichung lässt sich um eins reduzieren, wenn man ausnutzt, dass f im vorliegenden Fall gar nicht explizit von x abhängt. Man hat dann nämlich für $f(y,y')$ mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(y,y') &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f(y,y')}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f(y,y')}{\partial y'} \\
&= y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f(y,y')}{\partial y'} + y''\frac{\partial f(y,y')}{\partial y'} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'\frac{\partial f(y,y')}{\partial y'}\right).
\end{aligned}$$

Da die beiden Ableitungen nach x gleich sind, können sich die Funktionen auf der linken und der rechten Seite der Gleichung nur um eine additive Konstante C unterscheiden,

$$f(y,y') - y'\frac{\partial f(y,y')}{\partial y'} = C.$$

Dies ist die gesuchte Differentialgleichung erster Ordnung für $y(x)$. Setzen wir nun $f(y,y') = y\sqrt{1+y'^2}$ ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
f(y,y') - y'\frac{\partial f(y,y')}{\partial y'} &= y\sqrt{1+y'^2} - y'y\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \\
&= y\left(\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right) \\
&= y\left(\frac{1+y'^2-y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right) \\
&= \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}
\end{aligned}$$

und somit
$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C.$$
Diese Differentialgleichung erster Ordnung lässt sich durch Trennung der Variablen lösen. Dazu quadrieren wir die Gleichung und lösen dann nach y' auf,
$$y' = \pm\sqrt{\frac{y^2}{C^2} - 1}.$$
Wir bringen nun den Wurzelausdruck auf die andere Seite und integrieren über x von 0 bis x_1 und entsprechend über y von $y_0 = y(0)$ bis $y_1 = y(x_1)$,
$$\int\limits_{y_0}^{y_1} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2/C^2 - 1}} = \pm \int\limits_0^{x_1} \mathrm{d}x = \pm x_1.$$
Beim Integral über y substituieren wir $z = y/C$ und erhalten
$$\int\limits_{y_0}^{y_1} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2/C^2 - 1}} = C \int\limits_{z_0}^{z_1} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2 - 1}}.$$
Im Artikel über Areafunktionen hatten wir gesehen, dass sich der Areacosinus Hyperbolicus schreiben lässt als
$$\operatorname{arcosh}(z) = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$
Folglich ist nach der Kettenregel
$$\begin{aligned}\operatorname{arcosh}'(z) &= \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right) \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - 1}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{z^2-1} + z}{\sqrt{z^2-1}}\right) \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}\end{aligned}$$
genau unser Integrand, und damit $\operatorname{arcosh}(z)$ die gesuchte Stammfunktion, also
$$\int\limits_{z_0}^{z_1} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2 - 1}} = \operatorname{arcosh}(z_1) - \operatorname{arcosh}(z_0)$$
und weiter
$$\int\limits_{y_0}^{y_1} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2/C^2 - 1}} = C\left(\operatorname{arcosh}\left(\frac{y_1}{C}\right) - \operatorname{arcosh}\left(\frac{y_0}{C}\right)\right).$$

Insgesamt ist die Lösung der Differentialgleichung also, wenn wir wieder x und y statt x_1 und y_1 schreiben,

$$C\left(\operatorname{arcosh}\left(\frac{y(x)}{C}\right)-\operatorname{arcosh}\left(\frac{y_0}{C}\right)\right)=\pm x.$$

Dies lässt sich noch nach $y(x)$ auflösen,

$$y(x)=C\cosh\left(\pm\frac{x}{C}+\operatorname{arcosh}\left(\frac{y_0}{C}\right)\right).$$

Der Term $\operatorname{arcosh}(y_0/C)$ verschiebt den Graphen von $y(x)$ entlang der x-Achse. Da wir das Koordinatensystem so gelegt haben, dass $y(x)=y(-x)$ gilt und cosh eine gerade Funktion ist, muss dieser Term also verschwinden. Aus demselben Grund verschwindet auch das Minuszeichen vor x. Die endgültige Lösung lautet folglich

$$y(x)=C\cosh\left(\frac{x}{C}\right),$$

wie wir nun schon mehrfach gesehen haben.

Die Kettenlinie als Rotationskörper

Die Kettenlinie kann man auch mathematisch schön charakterisieren: Sie ist diejenige Kurve, welche durch zwei beliebig vorgegebene Punkte (x_1,y_1) und (x_2,y_2) geht und bei Rotation um die y-Achse eine Rotationsfläche minimaler Oberfläche produziert[2]. Dies können wir wieder leicht mit den Mitteln der Variationsrechnung nachprüfen.

Die Kurve können wir uns aus infinitesimal kleinen Kurvenstückchen $\mathrm{d}s$ zusammengesetzt denken. Ein solches Kurvenstück erzeugt bei Rotation um die y-Achse eine Mantelfläche

$$\mathrm{d}M=2\pi x\,\mathrm{d}s=2\pi x\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Die Gesamtmantelfläche erhält man dann durch Integration über x zu

$$M=2\pi\int_{x_1}^{x_2}x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Dies ist das Integral, welches minimal werden soll. Bezeichnen wir den Integranden mit

$$f(x,y,y')=x\sqrt{1+y'^2},$$

so werden wir auf die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'}-\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=0$$

[2]Wir gehen von $0<x_1<x_2$ und $0<y_1<y_2$ aus.

geführt. Diese kann nun direkt integriert werden. Man erhält dann

$$\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$$

und nach Quadrieren und Umordnen

$$y'^2 = \frac{C_1^2}{x^2 - C_1^2}.$$

Da dieser Ausdruck nicht negativ werden darf, muss die Integrationskonstante C_1 kleiner sein als x_1. Nach unserer Wahl von y_1 und y_2 müssen wir nun beim Wurzelziehen das positive Vorzeichen wählen, damit die Steigung der Kurve positiv ist. Somit folgt

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{C_1}{\sqrt{x^2 - C_1^2}}.$$

Diese Differentialgleichung können wir direkt integrieren zu

$$y(x) = C_1 \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{x^2 - C_1^2}}\,\mathrm{d}x = C_1 \mathrm{arcosh} \frac{x}{C_1} + C_2.$$

Die Integrationskonstanten sind aus der Forderung $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$ zu bestimmen. Auflösen nach x ergibt schließlich

$$x(y) = C_1 \cosh \frac{y - C_2}{C_1}.$$

Diese Rotationsfläche heißt *Katenoid.*

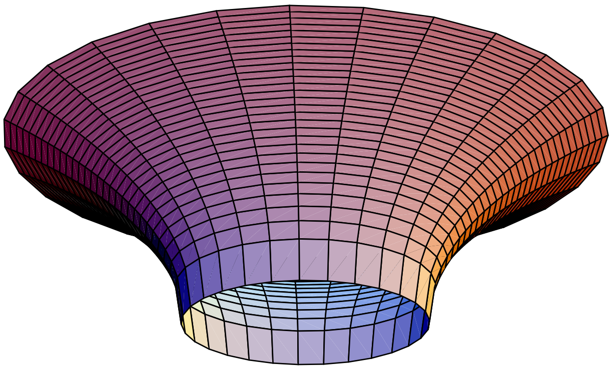

Abbildung 1.3: Der von der Kettenlinie erzeugte Rotationskörper.