Unendliche Mengen

Thomas Peters
Thomas' Mathe-Seiten
www.mathe-seiten.de

14. September 2003

Der Begriff „unendlich“ wird in der Mathematik vielfach angewendet. Bei Grenzübergängen, Asymptotenberechnungen oder Berechnung uneigentlicher Integrale wird er ganz natürlich benutzt. Aber wie groß ist eigentlich „unendlich“? Bei genauerer Betrachtung findet man darauf mehrere Antworten.

Abzählbar unendlich

Die Menge der *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ ist ein Beispiel für eine *abzählbar unendliche Menge*. Es gibt eine erste Zahl, und jede weitere Zahl hat genau einen Vorgänger und einen Nachfolger. Man kann die Menge der natürlichen Zahlen also abzählen, daher der Name. Diese Art von Unendlichkeit bezeichnet man als $\aleph_0$[1].

Überraschenderweise ist auch die Menge der *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich. Man kann sie nämlich folgendermaßen aufschreiben:

$$\begin{array}{cccccc}
1/1 & 2/1 & 3/1 & 4/1 & 5/1 & \cdots \\
1/2 & 2/2 & 3/2 & 4/2 & 5/2 & \cdots \\
1/3 & 2/3 & 3/3 & 4/3 & 5/3 & \cdots \\
1/4 & 2/4 & 3/4 & 4/4 & 5/4 & \cdots \\
1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 & 5/5 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Wie man sieht, ist das eine vollständige Auflistung aller positiver rationaler Zahlen, die problemlos abzählbar ist. Ein entsprechendes Schaubild lässt sich natürlich auch für die negativen rationalen Zahlen anfertigen. Die Vereinigungsmenge aus diesen Mengen und $\{0\}$ ist immer noch abzählbar unendlich.

Überabzählbar unendlich

Es gibt aber auch Mengen, die echt größer sind als die natürlichen Zahlen. Die Menge der *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ ist ein Beispiel für eine *überabzählbar unendliche Menge*.

Beweis durch Cantor’sches Diagonalverfahren: Wie beschränken uns auf das Intervall $[0;1]$. Angenommen, die reellen Zahlen in diesem Intervall wären abzählbar unendlich. Dann müsste folgende Liste alle enthalten:

$$\begin{array}{ccc}
A_1 & = & 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\cdots \\
A_2 & = & 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\cdots \\
A_3 & = & 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\cdots \\
A_4 & = & 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\cdots \\
\vdots & = & \vdots
\end{array}$$

Es lässt sich aber nun folgendermaßen eine Zahl $0.b_1b_2b_3\ldots$ konstruieren, die in der Liste nicht vorkommt:

[1] Aleph, erster Buchstabe des hebräischen Alphabets

Wir wählen b_1 so, dass es ungleich a_{11} ist, b_2 so, dass es ungleich a_{22} ist, und allgemein b_n so, dass es ungleich a_{nn} ist. Diese Zahl stimmt mit A_1 in der ersten Nachkommastelle nicht überein, mit A_2 nicht in der zweiten, und mit A_n nicht in der n-ten.

Da die falsche Annahme zu einem Widerspruch geführt hat, muss die Menge der reellen Zahlen überabzählbar unendlich sein. $\square$

Mengenlehre

Die Menge aller Teilmengen $\mathrm{Pot}(M)$ einer Menge M nennt man *Potenzmenge*. Die *Mächtigkeit* einer Menge, also die Anzahl ihrer Elemente, heißt auch ihre *Kardinalität*, geschrieben $\mathrm{card}\, M = n$.

Wir werden nun zeigen: Hat eine endliche Menge die Kardinalität n, so hat ihre Potenzmenge die Kardinalität 2^n.
Beweis:
Induktionsanfang: Für die leere Menge $\emptyset$ ist $\mathrm{card}\,\emptyset = 0$, $\mathrm{Pot}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, also $\mathrm{card}\,\mathrm{Pot}(\emptyset) = 1$.
Induktionsschritt: Die Menge M habe $n + 1$ Elemente. Bildet man die Menge M', indem man aus M ein Element entfernt, so gilt $\mathrm{Pot}(M') = 2^n$. Man erhält $\mathrm{Pot}(M)$ aus $\mathrm{Pot}(M')$, indem man zu jedem Element aus $\mathrm{Pot}(M')$ noch das aus M entfernte Element hinzufügt, das macht insgesamt $2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$ Elemente. $\square$

Die Potenzmenge einer endlichen Menge ist also stets größer als die Ausgangsmenge. Dies gilt auch für unendliche Mengen. Wir zeigen nun, dass $\mathrm{card}\,\mathrm{Pot}(M) > \mathrm{card} M$ für eine beliebige Menge M gilt.

Beweis: Nehmen wir dazu das Gegenteil an: M und $\mathrm{Pot}(M)$ seien gleich groß. Dann gibt es eine umkehrbar eindeutige Abbildung zwischen den Elementen aus M und $\mathrm{Pot}(M)$.

Nehmen wir nun ein beliebiges Element $a \in M$ und ordnen ihm ein Element $A \in \mathrm{Pot}(M)$ zu, wobei A natürlich eine Teilmenge von M ist (denn so ist $\mathrm{Pot}(M)$ ja definiert). Nun kann $a \in A$ sein oder auch nicht. Daraus können wir einen Widerspruch ableiten:

Betrachtet werde die Menge Ω aller Elemente $a \in M$, für die gilt: a ist nicht Element des ihm zugeordneten Elements A aus $\mathrm{Pot}(M)$. Ω besteht aus Elementen von M, ist also eine Teilmenge von M und daher ein Element von $\mathrm{Pot}(M)$. Daher gibt es ein Element $o \in M$, dem Ω zugeordnet ist.

Ist nun o ein Element von Ω? Falls ja, dann widerspricht das der Definition von Ω. Falls nein, so muss o laut Definition von Ω ein Element von Ω sein. So oder so ergibt sich ein Widerspruch. $\square$

Man schreibt nun formal $2^{\aleph_0}$ für die Mächtigkeit der Potenzmenge einer Menge der Mächtigkeit $\aleph_0$. Wir wissen nun, dass sowohl die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ also auch die Potenzmenge $\mathrm{Pot}(\mathbb{N})$ echt größer sind als $\mathbb{N}$. Tatsächlich kann man zeigen, dass beide gleich groß sind.